目　录

引　言

群是认识现实世界最深刻的规律性之一——对称性的有力武器. 譬如，一个平面图形 E 的对称性，可以用平面上保持图形 E 不变的正交变换（旋转、反射以及它们的合成）组成的集合对于映射的乘法形成的群来刻画，这个群称为图形 E 的对称群. 等边三角形比等腰三角形更对称，就是因为等边三角形的对称群的阶（即，元素的数目）比等腰三角形的对称群的阶大.

研究群的结构的一个重要方法是考虑群 G 在一个集合 Ω 上的作用，也就是通过群 G 到集合 Ω 上的全变换群 $S(\Omega)$（它由 Ω 到自身的所有双射组成）的同态来研究群 G 的结构. 这是因为同态的核是 G 的正规子群，同态的像是 $S(\Omega)$的子群，并且它与 G 对于同态核的商群同构；此外，Ω 内一点 x 的稳定子群（G 中保持 x 不动的元素组成的集合）是 G 的子群，等等. 有限群理论中十分重要的 Sylow 定理，就可以利用群 G 在适当的集合上的作用得到.

如果把集合 Ω 换成域 K 上的向量空间 V，去考虑群 G 在向量空间 V 上的作用，也就是考虑群 G 到向量空间 V 上所有可逆线性变换形成的群 $\mathrm{GL}(V)$的同态，那么效力会更大. 这是因为这样做除了具有群在集合上的作用的各个优点以外，还具备新的优点：域上的向量空间有漂亮的结构，并且域 K 上 n 维向量空间 V 上的可逆线性变换群 $\mathrm{GL}(V)$同构于域 K 上 n 级可逆矩阵形成的一般线性群 $GL_n(K)$，而对于矩阵的各种技巧，我们已非常熟悉.

群表示论就是研究任意给定的一个群在向量空间上作用的各种方式. 通过研究群 G 在各个向量空间上的作用来研究群 G 的结构，是一条富有成效的途径. 例如，Burnside 关于 p^aq^b 阶群可解的定理和 Frobenius 关于真正规子群存在的一个充分条件，早在本

世纪初就用群表示论证明了，然而前者迟至 1960 年左右才有纯粹群论的证法，后者则至今还没有其他证法. 应当特别指出的是，群表示论在研究有限单群的分类问题中起了重要作用. 到 80 年代初期，有限单群分类问题基本解决，现在正继续研究有限单群分类定理的证明的简化，对此群表示论仍将起作用.

群表示论还在数学的许多分支以及其他自然科学分支中有重要应用. 譬如，人们早已知道，在结晶学、量子力学、量子化学等领域里，群表示论是一个强有力的工具. 又如，在纯粹数学的分支中，抽象调和分析本质上是群表示论. 再如，在最近几十年，计算机技术的发展日新月异，计算机在社会中迅速普及，由此引起离散数学的勃兴，作为离散数学的重要分支组合数学，在最近几年也越来越多地使用群表示论这一有力工具. 还有，信息时代需要的编码和密码，也要用到群表示论. 可以预料，群表示论的应用范围将越来越广泛.

有限群的表示论与向量空间的基域 K 有密切关系. 如果域 K 的特征不能整除有限群 G 的阶，那么群 G 在域 K 上的向量空间上的作用比较容易研究，结果比较简洁，人们称之为有限群的常表示论. 如果域 K 的特征 p 整除有限群 G 的阶，群 G 在域 K 上向量空间上的作用变得复杂得多，人们称之为有限群的模表示论. 有限群的常表示论的研究始于 1896 年，由 Frobenius 开始研究. 而有限群的模表示论则是于 1935 年由 R. Brauer 开始研究的. 限于篇幅，本书主要阐述有限群的常表示理论.

对于无限群的表示论的研究，需要在无限群中加进拓扑结构. 本书第六章将介绍一类无限群——紧致拓扑群的表示理论.

本书中凡是只对有限群适用的概念和结论都会加以指明，否则对有限群和无限群都适用.

第一章　群表示论的基本概念和 Abel 群的表示

§1　群的线性表示的定义和例

设 V 是域 K 上的向量空间，V 上所有可逆线性变换组成的乘法群记作 $\mathrm{GL}(V)$.

定义 1　设 G 是群，$V\neq\{0\}$ 是域 K 上的向量空间. G 到 $\mathrm{GL}(V)$ 的一个群同态 φ 称为 G 在域 K 上的一个**线性表示**（简称为 G 的一个 K-表示或者 G 的一个表示）. V 称为**表示空间**（或 G **模**）. 若 V 是有限维的，则 V 的维数 $\dim_K V$ 称为表示的**次数**（或**维数**），记作 $\deg\varphi$；若 V 是无限维的，则称 φ 是 G 的无限维表示.

从定义 1 看出，群 G 的一个线性表示是由表示空间 V 和群同态 φ 组成的二元组 (φ,V)，它使得

$$\varphi(g)\in\mathrm{GL}(V),\quad \forall\, g\in G;$$
$$\varphi(gh)=\varphi(g)\varphi(h),\quad \forall\, g,h\in G;$$
$$\varphi(e)=1_V,$$

其中 e 是 G 的单位元，1_V 是 V 的恒等变换. 由此可见，群 G 的一个线性表示就是 G 用线性变换群 $\mathrm{GL}(V)$ 的子群来实现. 这样做至少有三个好处：(1) $\mathrm{GL}(V)$ 的子群是具体的群，向量空间及其线性变换的许多性质可以用上；(2) 同态 φ 的核是 G 的正规子群，从而可利用同态的核研究 G 的结构；(3) 当 φ 是 1 次表示时，φ 是 G 上的函数（这一点在下面将会解释），可以利用它来研究 G 的结构.

群 G 的表示 φ 称为**忠实的**，如果同态 φ 的核 $\mathrm{Ker}\varphi=\{e\}$；$\varphi$ 称为**平凡的**，如果 $\mathrm{Ker}\varphi=G$. G 的 1 次平凡表示称为 G 的**主表示**或**单**

位表示，记作 1_G.

域 K 上的所有 n 级可逆矩阵组成的乘法群称为**一般线性群**．记作 $GL_n(K)$ 或者 $GL(n,K)$.

定义 2 群 G 到 $GL_n(K)$ 的一个群同态 Φ 称为 G 在域 K 上的一个 n 次**矩阵表示**.

显然，若给了群 G 的一个 n 次线性表示 (φ,V)，在 V 中取定一个基，对于 $g\in G$，把线性变换 $\varphi(g)$ 在这个基下的矩阵记作 $\Phi(g)$，则

$$\Phi:\ G \to GL_n(K),$$
$$g \mapsto \Phi(g)$$

是 G 的一个 n 次矩阵表示，称 Φ 是由 φ 提供的.

本书中用小写希腊字母 $\varphi,\psi,\cdots$ 作为线性表示的符号；用大写希腊字母 $\Phi,\Psi,\cdots$ 作为相应的矩阵表示的符号(对于给定的基).

定义 3 群 G 在域 K 上的两个线性表示 (φ,V) 和 (ψ,W) 称为是**等价的**(或**同构**)，如果存在向量空间的一个同构 $\sigma:\ V\to W$ 使得

$$\psi(g)=\sigma\varphi(g)\sigma^{-1},\forall\ g\in G, \tag{1}$$

此时记作 $\varphi\approx\psi$.

定义 4 群 G 在域 K 上的两个矩阵表示 Φ 和 Ψ 称为是**等价的**(记作 $\Phi\approx\Psi$)，如果它们有相同的次数并且存在域 K 上一个可逆矩阵 S 使得

$$\Psi(g) = S^{-1}\Phi(g)S,\quad \forall\ g\in G. \tag{2}$$

设 (φ,V) 是群 G 的 n 次 K-表示，它对于 V 中不同的基提供的矩阵表示必等价(因为 $\Phi_2(g)=S^{-1}\Phi_1(g)S,\forall\ g\in G$，这里 S 是第一个基到第二个基的过渡矩阵). 反之，群 G 的等价的矩阵表示可看成是由 G 的同一个线性表示对不同基提供的.

不难证明：群 G 的两个有限维线性表示等价当且仅当它们提供的矩阵表示等价.

下面我们来看一些重要的线性表示.

1. 置换表示

设群 G 在集合 $\Omega=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上有一个**作用**，即，存在 $G\times\Omega$ 到 Ω 的一个映射：$(g,x_i)\mapsto gx_i$ 满足：

$$(gh)x_i = g(hx_i),\quad \forall\, g,h\in G, \forall\, x_i\in\Omega;$$

$$ex_i = x_i,\quad \forall\, x_i\in\Omega.$$

取一个域 K，在所有形式和

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n,\quad a_i\in K(i=1,2,\cdots,n)$$

组成的集合 V 中规定

$$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=\sum_{i=1}^{n}b_ix_i \Longleftrightarrow a_i=b_i,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i+\sum_{i=1}^{n}b_ix_i := \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)x_i,$$

$$k\sum_{i=1}^{n}a_ix_i := \sum_{i=1}^{n}(ka_i)x_i,$$

则 V 成为域 K 上 n 维向量空间. 我们把 $0x_1+\cdots+0x_{i-1}+1x_i+0x_{i+1}+\cdots+0x_n$ 与 x_i 等同，则$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是 V 的一个基. 对于 $g\in G$，规定 $\varphi(g)\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right) := \sum_{i=1}^{n}a_i(gx_i)$，显然 $\varphi(g)$是 V 的线性变换. 设 $i\neq j$，假如 $gx_i=gx_j$，则 $g^{-1}(gx_i)=g^{-1}(gx_j)$，从而$(g^{-1}g)x_i=(g^{-1}g)x_j$，即，$ex_i=ex_j$，于是 $x_i=x_j$，矛盾. 因此$\{gx_1,gx_2,\cdots,gx_n\}=\Omega$，从而$(gx_1,gx_2,\cdots,gx_n)$也是 V 的一个基，这表明 $\varphi(g)$是可逆的. 所以 φ 是 G 到 $GL(V)$的映射. 显然 $\varphi(gh)=\varphi(g)\varphi(h)$，$\forall\, g,h\in G$. 因此 φ 是 G 在域 K 上的一个线性表示. 称这样得到的表示 φ 为 G 的**置换表示**. 对于这个基$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，φ 提供的矩阵表示 Φ 使得对于每个 $g\in G$ 都有 $\Phi(g)$是**置换矩阵**，即每行每列恰有一个元素是 1，其余元素全为零的矩阵.

2. 有限群的正则表示

设 G 是有限群，群 G 通过左平移作用于集合 G 上：$(g,h)\mapsto gh$. 由这个作用得到的 G 在域 K 上的置换表示称为 G 的**正则 K**

表示，简称为 G 的**正则表示**. 表示空间是 $\left\{\sum_{g\in G} a_g g \,\middle|\, a_g \in K\right\}$，记作 $K[G]$；群 G 的所有元素是向量空间 $K[G]$ 的一个基(根据置换表示的定义). G 的正则表示的次数等于 G 的阶 $|G|$. 显然，正则表示一定是忠实的. 以后我们会看到有限群的正则表示是相当重要的.

3. 1 次表示

设 V 是域 K 上的 1 维向量空间，设 (φ, V) 和 (ψ, V) 是群 G 的具有表示空间 V 的两个 1 次表示. 如果 (φ, V) 与 (ψ, V) 等价，则存在向量空间 V 的自同构 σ 使 $\psi(g)=\sigma\varphi(g)\sigma^{-1}$，$\forall\, g\in G$. 由于 1 维向量空间 V 的任意两个线性变换的乘法是可交换的，于是由上述得 $\psi(g)=\varphi(g)\sigma\sigma^{-1}=\varphi(g)$，$\forall\, g\in G$，从而 $\psi=\varphi$. 这说明：群 G 的具有相同表示空间的两个 1 次表示如果**等价**，则它们作为映射是相等的，反之是显然的.

设 Φ 和 Ψ 是群 G 在域 K 上的两个 1 次矩阵表示，如果 $\Phi\approx\Psi$，则存在域 K 上的 1 级可逆矩阵 S 使 $\Psi(g)=S^{-1}\Phi(g)S=\Phi(g)$，$\forall\, g\in G$. 从而 $\Psi=\Phi$. 这说明：群 G 在域 K 上的两个 1 次矩阵表示**等价**当且仅当它们作为映射是**相等**的.

由于域 K 上的 1 级矩阵 (a) 可以跟域 K 中的元素 a 等同，所以群 $GL_1(K)$ 可与域 K 的乘法群 K^* 等同. 又由于对于域 K 上 1 维向量空间 V，群 $GL(V)\cong GL_1(K)$，并且这里的同构映射与 V 中基的选取无关(这是因为 1 维向量空间 V 的同一个线性变换在不同基下的矩阵是相等的)，因此我们可以把群 G 在域 K 上的 1 次线性表示和 1 次矩阵表示都看成是 G 到 K^* 的群同态. 于是 G 的 1 次表示是 G 上的函数.

下面我们来看群表示的几个具体例子.

例 1.1.1 设 $G=\langle g\rangle$ 是 n 阶循环群，设域 K 包含一个本原 n 次单位根 ζ(即，$\zeta^n=1$，但是 $\zeta^i\neq 1$ 对于 $0<i<n$). 求 G 的所有 1 次 K-表示. 假如 φ 是 G 的 1 次 K-表示，则有 $\varphi(g^n)=\varphi(g)^n$，并且 $\varphi(g^n)=\varphi(e)=1$. 因此 $\varphi(g)^n=1$，这表明 $\varphi(g)$ 是 n 次单位根. 显然

$1,\zeta,\cdots,\zeta^{n-1}$是 K 中全部 n 次单位根，并且它们两两不同. 现在对于 $0\leqslant r<n$，规定 $\varphi_r(g)=\zeta^r$，并且 $\varphi_r(g^i)=g^{ir}(0\leqslant i<n)$，易验证 φ_r 是 G 的 1 次 K-表示. 于是 $\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1}$是 G 的所有 1 次 K-表示，易看出它们两两不相等，从而两两不等价.

例 1.1.2 设 $G=\langle g\rangle$是素数 p 阶循环群，设 K 是特征为 p 的域. 考虑映射

$$\Phi: G \to \mathrm{GL}_2(K)$$

$$g^i \mapsto \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i=0,1,\cdots,p-1,$$

容易看出 $\Phi(g^i g^j)=\Phi(g^i)\Phi(g^j)$，因此 Φ 是 G 在 K 上的 2 次矩阵表示.

例 1.1.3 设 $G=\langle g\rangle$是 3 阶循环群，设 K 是任一域. 考虑 G 到 $\mathrm{GL}_2(K)$的映射 Φ:

$$\Phi(e) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi(g) := \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi(g^2) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

容易验证 Φ 保持乘法，因此 Φ 是 G 在 K 上的 2 次矩阵表示.

例 1.1.4 正三角形的所有对称变换(即保持这个正三角形不变的平面正交点变换)组成的群称为 3 级二面体群，记作 D_3. 绕正三角形的中心旋转$\dfrac{2\pi}{3}$的旋转 α 生成一个 3 阶循环子群$\langle\alpha\rangle$；关于这个正三角形的一根对称轴的反射 β 显然是 D_3 的一个 2 阶元. 容易说明 D_3 共含 6 个元素：$e,\alpha,\alpha^2,\beta,\beta\alpha,\beta\alpha^2$，其中 e 是平面的恒等变换；它们还满足关系：$\beta\alpha\beta^{-1}=\alpha^{-1}$. 现在我们来给出 D_3 在实数域上的一个 2 次表示(简称为 2 次实表示).

设 V 是正三角形所在平面上的全体向量组成的实向量空间. 显然平面的一个正交点变换 σ 诱导了 V 的一个变换 $\bar{\sigma}$: $\bar{\sigma}(\overrightarrow{AB}) := \overrightarrow{\sigma(A)\sigma(B)}$，其中 A,B 是平面上任意点；并且 $\bar{\sigma}\in\mathrm{GL}(V)$. 于是容

易看到 D_3 有一个自然的 2 次实表示，即 D_3 到 GL(V)的如下一个同态 φ:

$$\varphi(\alpha^i) := \overline{\alpha^i}, \quad \varphi(\beta\alpha^i) := \overline{\beta\alpha^i}, \quad i = 0,1,2.$$

在平面上取一个直角坐标系$[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2]$，其中 O 是正三角形的中心，$\vec{e}_2$ 是一根对称轴的方向，β 是关于这根对称轴的反射. 显然对于 V 的这个基$(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$，φ 提供的矩阵表示为：

$$\Phi(\alpha) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \Phi(\beta) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Phi(\alpha^i) = \Phi(\alpha)^i, \quad \Phi(\beta\alpha^i) = \Phi(\beta)\Phi(\alpha)^i, \quad i = 0,1,2.$$

例 1.1.5 设 G 是 3 元对称群 S_3，设 K 是任一域. 考虑 S_3 在集合 $\Omega=\{1,2,3\}$上的自然作用，即

$$(\sigma,i)\mapsto \sigma(i), \quad \forall\, \sigma \in S_3, \quad i = 1,2,3.$$

这个作用引起的 S_3 的置换表示记作 φ，对于基$(1,2,3)$，φ 提供的矩阵表示为：

$$\Phi(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi((12)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Phi((13)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi((23)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi((123)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi((132)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 1.1.6 设 K 是任一域，n 元对称群 S_n 在集合 $\Omega=\{1,2,\cdots,n\}$上的自然作用引起 S_n 的置换表示 φ，对于基$(1,2,\cdots,n)$，φ 提供的矩阵表示为：

$$\Phi(\sigma) = E_{\sigma(1)1} + E_{\sigma(2)2} + \cdots + E_{\sigma(n)n}, \quad \forall\, \sigma \in S_n,$$

其中 E_{ij} 是 (i,j) 元为域 K 的单位元素而其余元全为零的 n 级矩阵.

例 1.1.7 设 G 是实数域 $\boldsymbol{R}$ 的加法群 $(\boldsymbol{R},+)$，设 V 是欧几里得平面上以定点 O 为起点的全体向量组成的实向量空间. 考虑 $(\boldsymbol{R},+)$ 到 $\mathrm{GL}(V)$ 的如下映射 φ: 对于 $t\in(\boldsymbol{R},+)$，$\varphi(t)$ 是绕定点 O 的转角为 t 的旋转. 从几何上看，显然有转角为 t 的旋转与转角为 u 的旋转的乘积是转角为 $t+u$ 的旋转，由此得到:

$$\varphi(t+u)=\varphi(t)\varphi(u).$$

因此 φ 是 $(\boldsymbol{R},+)$ 的 2 次实表示. 平面上取定一个直角坐标系 $[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2]$，对于 V 的这个基 $\vec{e}_1,\vec{e}_2$，φ 提供的矩阵表示为:

$$\Phi:\ t\mapsto\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix},\quad \forall\, t\in\boldsymbol{R}.$$

由于这个映射是同态，因此 $\Phi(t+u)=\Phi(t)\Phi(u)$，从而得到

$$\begin{pmatrix}\cos(t+u) & -\sin(t+u)\\ \sin(t+u) & \cos(t+u)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos u & -\sin u\\ \sin u & \cos u\end{pmatrix},$$

由此可推导出三角函数的和角公式.

例 1.1.8 设 V 是所有次数不超过 n 的实系数多项式组成的实向量空间. 对于每个 $t\in\boldsymbol{R}$，定义 V 上的一个变换 $L(t)$ 如下:

$$(L(t)f)(x)\ :=f(x-t),\quad \forall\, f\in V.$$

容易验证 $L(t)$ 是 V 的线性变换，并且是可逆的，因此 $L(t)\in\mathrm{GL}(V)$. 容易看出 $L(t+u)=L(t)L(u)$，因此 L 是实数域的加法群 $(\boldsymbol{R},+)$ 的 $n+1$ 次实表示.

例 1.1.9 对于每一个固定的 $a\in\boldsymbol{R}$，指数函数 $t\mapsto e^{at}\,(t\in\boldsymbol{R})$ 是实数域的加法群 $(\boldsymbol{R},+)$ 到乘法群 $\boldsymbol{R}^*$ 的同态，从而指数函数是加法群 $(\boldsymbol{R},+)$ 的一个 1 次实表示. 现在我们要问：还有哪些可微函数是 $(\boldsymbol{R},+)$ 的 1 次实表示？如果可微函数 f 是 $(\boldsymbol{R},+)$ 的 1 次实表示，则

$$f(t+u)=f(t)f(u),\quad \forall\, t,u\in\boldsymbol{R}.$$

上式两边对 u 求导，然后令 $u=0$，我们得到

$$f'(t) = f(t)f'(0).$$

记 $a=f'(0)$. 上述微分方程的一般解是 $f(t)=Ce^{at}$, 显然 $C=f(0)$. 由于 f 是同态, 因此 $f(0)=1$, 从而 $C=1$, 这就得出 $f(t)=e^{at}$. 这说明在可微函数中, 只有指数函数是 $(\boldsymbol{R},-)$ 的 1 次实表示. 换句话说, $(\boldsymbol{R},+)$ 到 $\boldsymbol{R}^*$ 的每个可微群同态必是指数函数. 这是指数函数在数学中起着重要作用的原因之一.

例 1.1.10 在解常系数线性微分方程组时我们遇到**矩阵指数函数**:

$$t \mapsto e^{tA} \quad (t \in \boldsymbol{R}, A \in M_n(\boldsymbol{R})),$$

这里 $M_n(\boldsymbol{R})$ 是实数域 $\boldsymbol{R}$ 上所有 n 级矩阵组成的集合, e^{tA} 的定义是

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}.$$

矩阵指数函数具有下述性质:

$$e^{(t+u)A} = e^{tA}e^{uA}, \quad \forall\, t,u \in \boldsymbol{R}.$$

由此得出 $e^{tA}e^{-tA}=e^{(t-t)A}=e^{0A}=I$, 从而矩阵 e^{tA} 可逆. 因此对于每一个固定的 n 级实矩阵 A, 矩阵指数函数: $t \mapsto e^{tA}\,(t\in\boldsymbol{R})$ 是 $(\boldsymbol{R},+)$ 的 n 次实矩阵表示.

例 1.1.11 设 V 是所有实系数多项式组成的实向量空间, 对每个 $t\in\boldsymbol{R}$, 定义 V 的一个变换 $L(t)$ 为: $(L(t)f)(x) := f(x-t)$, $\forall\, f\in V$. 易验证 $L(t)$ 是 V 的可逆线性变换且 $L(t+u)=L(t)\cdot L(u)$, 因此 L 是 $(\boldsymbol{R},+)$ 的无限维实线性表示.

习 题 1.1

1. 写出 3 元对称群 S_3 在域 K 上的正则表示所提供的矩阵表示.

2. 写出 4 阶循环群在域 K 上的正则表示所提供的矩阵表示.

3. 正方形的所有对称变换组成的群称为 4 级二面体群, 记作 D_4. 利用几何意义求出 D_4 的一个 2 次实表示及其提供的矩阵表示.

4. 在例 1.1.1 至例 1.1.7 中，哪些表示是忠实的？

5. 设 Φ 是例 1.1.6 中构造的 n 元对称群 S_n 的 n 次矩阵表示，对于 $\sigma\in S_n$，说明 σ 的不动点的数目等于矩阵 $\Phi(\sigma)$ 的迹（记作 $\mathrm{tr}\Phi(\sigma)$）.

6. 设 V 是所有实系数多项式组成的实向量空间. 对于每个 $t\in \boldsymbol{R}$，定义 V 的变换 $S(t)$ 为下列之一：

(1) $(S(t)f)(x):=f(tx),\quad \forall f\in V$；

(2) $(S(t)f)(x):=f(e^t x),\quad \forall f\in V$.

问：S 是群 $(\boldsymbol{R},+)$ 的实线性表示吗？

7. 设 G 是整数加群 $(\boldsymbol{Z},+)$，设 K 是复数域 $\boldsymbol{C}$. 对于 $\lambda\in \boldsymbol{C}^*$，令 $\varphi(k):=\lambda^k,\forall k\in \boldsymbol{Z}$. 说明 φ 是群 $(\boldsymbol{Z},+)$ 的 1 次复表示；讨论 φ 何时是忠实的.

§2 从已知表示构造新表示的一些方法

群 G 的一个表示是从某一个方面反映 G 的结构，为了研究群 G 的结构，我们希望构造出 G 的尽可能多的表示. 此外，群的许多表示本身有着重要的应用（例如，例 1.10 中的群 $(\boldsymbol{R},+)$ 的 n 次实矩阵表示：矩阵指数函数在数学中起着重要作用），这也促使我们去构造群的表示. 在 §1 中我们介绍了从群 G 在有限集合 Ω 上的一个作用如何构造出 G 的一个线性表示（称之为 G 的置换表示）；从几何途径如何得到线性表示（见例 1.1.4）；从线性表示的定义出发如何构造出表示（见例 1.1.1 和例 1.1.9）. 本节将介绍从群的已知的表示出发构造新的表示的一些方法，它们在群表示理论中起着重要的作用.

2.1 子表示和商表示

定义 1 设 (φ,V) 是群 G 的一个 K-表示. V 的一个线性子空间 U 称为**表示 φ 的不变子空间或 G 不变子空间**，如果 $\varphi(g)u\in U$，

$\forall\ g\in G,\forall\ u\in U$.

零子空间和 V 本身显然是 V 的 G 不变子空间，称它们是平凡的 G 不变子空间.

显然，V 的 G 不变子空间的和与交仍然是 G 不变子空间.

设(φ,V)是群 G 的 n 次 K-表示，如果它有非平凡的 G 不变子空间 U，那末我们在 U 中取一个基$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$，把它扩充成 V 的一个基$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n)$，在这个基下，$\varphi$ 提供的矩阵表示 Φ 使得对于每一个 $g\in G$，$\Phi(g)$具有如下的形式

$$\Phi(g)=\begin{pmatrix}A(g) & C(g)\\ 0 & B(g)\end{pmatrix}, \tag{1}$$

其中 $A(g)$是 m 级方阵，$B(g)$是$(n-m)$级方阵. 反之，如果表示 φ 在 V 的某一个基下提供的矩阵表示 Φ 使得对每个 $g\in G$，$\Phi(g)$具有形式(1)，那末这个基的前面 m 个基向量生成的子空间就是 V 的 G 不变子空间.

设 $U(\neq\{0\})$是群 G 的 n 次表示(φ,V)的不变子空间，则对于每个 $g\in G$，V 的可逆线性变换 $\varphi(g)$可以限制到子空间 U 上成为 U 的可逆线性变换，记作 $\varphi(g)|U$. 令

$$\varphi_U(g)\ :=\varphi(g)|U,\quad \forall\ g\in G, \tag{2}$$

显然 φ_U 是群 G 到群 GL(U)的同态，从而 φ_U 是 G 的具有表示空间 U 的 n 次表示，称 φ_U 是 φ 的**子表示**.

仍设 $U(\neq V)$是群 G 的 n 次表示(φ,V)的不变子空间，对于每个 $g\in G$，利用 V 的可逆线性变换 $\varphi(g)$可以定义商空间 V/U 的一个变换如下：

$$x+U\mapsto\varphi(g)x+U,\quad \forall\ x\in V. \tag{3}$$

我们首先要说明(3)的确是 V/U 到自身的一个映射，即，(3)的右边不依赖于给定陪集的代表 x 的选择. 为此在陪集 $x+U$ 中另取一个代表 $x'=x+u$，其中 $u\in U$. 我们有

$$\begin{aligned}\varphi(g)x'+U&=\varphi(g)(x+u)+U\\&=\varphi(g)x+\varphi(g)u+U=\varphi(g)x+U,\end{aligned}$$

这里我们利用了 U 的不变性，即，$\varphi(g)u\in U$. 容易验证(3)是 V/U 的线性变换并且是可逆的，把这个变换记作 $\varphi_{V/U}(g)$，于是我们得到群 G 到群 $GL(V/U)$的一个映射：$g\mapsto\varphi_{V/U}(g)$，容易验证这是一个同态. 因此 $\varphi_{V/U}$是 G 的具有表示空间 V/U 的表示，称它为 φ 的**商表示**.

设 U 是群 G 的 n 次 K-表示(φ,V)的非平凡不变子空间，在 U 中取一个基$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$，扩充成 V 的一个基$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n)$，在这个基下 φ 提供的矩阵表示 Φ 使得对每个 $g\in G$，$\Phi(g)$ 有形式(1). 显然 φ 的子表示φ_U使得线性变换 $\varphi_U(g)$在基$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$下的矩阵为(1)中的 $A(g)$，若把 φ_U 在此基下提供的矩阵表示记作 Φ_U，则 $\Phi_U(g)=A(g)$，$\forall\ g\in G$. 容易看出$(\alpha_{m+1}+U,\alpha_{m+2}+U,\cdots,\alpha_n+U)$是商空间 V/U 的一个基，我们来证 φ 的商表示 $\varphi_{V/U}$ 使得 $\varphi_{V/U}(g)$在此基下的矩阵为(1)中的 $B(g)$：设 $B(g)=(b_{ij}(g))$，$C(g)=(c_{ij}(g))$，对于每个 $j>m$，我们有

$$\begin{aligned}\varphi_{V/U}(g)(\alpha_j+U)&=\varphi(g)\alpha_j+U\\&=\sum_{i=1}^{m}c_{ij}(g)\alpha_i+\sum_{i=m+1}^{n}b_{ij}(g)\alpha_i+U\\&=\sum_{i=m+1}^{n}b_{ij}(g)\alpha_i+U=\sum_{i=m+1}^{n}b_{ij}(g)(\alpha_i+U),\end{aligned}$$

因此 $\varphi_{V/U}(g)$在此基下的矩阵为 $B(g)$. 若把 $\varphi_{V/U}$在此基下提供的矩阵表示记作 $\Phi_{V/U}$，则 $\Phi_{V/U}(g)=B(g)$，$\forall\ g\in G$. 于是(1)可以写成

$$\Phi(g)=\begin{pmatrix}\Phi_U(g)&C(g)\\0&\Phi_{V/U}(g)\end{pmatrix}.\tag{4}$$

2.2 表示的直和

定义 2 设(φ_1,V_1)和(φ_2,V_2)是群 G 的两个 K-表示，φ_1 与 φ_2 的**直和**是群 G 在向量空间 V_1 与 V_2 的(外)直和 $V_1\dotplus V_2$ 上依下述规则定义的表示 $\varphi_1\oplus\varphi_2$：

$$(\varphi_1 \oplus \varphi_2)(g)(v_1,v_2) := (\varphi_1(g)v_1, \varphi_2(g)v_2),$$
$$\forall\, g \in G, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2.$$

容易验证上式规定的 $\varphi_1 \oplus \varphi_2$ 确实是群 G 的线性表示.

群 G 的任意有限多个 K-表示的直和可以用类似的方式定义.

我们看 $\varphi_1 \oplus \varphi_2$ 提供的矩阵表示. 设$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$是 V_1 的一个基,$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$是 V_2 的一个基,则$((\alpha_1,0),(\alpha_2,0),\cdots,(\alpha_m,0),(0,\beta_1),(0,\beta_2),\cdots,(0,\beta_n))$是 $V_1 \dotplus V_2$ 的一个基. 设 φ_1,φ_2 分别在基$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$,$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$下提供的矩阵表示为 Φ_1,Φ_2. 则 $\varphi_1 \oplus \varphi_2$ 在基$((\alpha_1,0),\cdots,(\alpha_m,0),(0,\beta_1),\cdots,(0,\beta_n))$下提供的矩阵表示 $\Phi_1 \oplus \Phi_2$ 为:

$$(\Phi_1 \oplus \Phi_2)(g) = \begin{pmatrix} \Phi_1(g) & 0 \\ 0 & \Phi_2(g) \end{pmatrix}, \quad \forall\, g \in G. \tag{5}$$

群 G 的有限多个 K-表示的直和提供的矩阵表示可类似讨论.

现在设(φ,V)是群 G 的 K-表示,如果 V 是 φ 的两个非平凡的不变子空间 V_1 与 V_2 的直和,即 $V=V_1 \oplus V_2$,则 φ 有两个子表示 φ_{V_1} 与 φ_{V_2},并且可以证明 $\varphi \approx \varphi_{V_1} \oplus \varphi_{V_2}$. 证明如下:因为 $V=V_1 \oplus V_2$,所以 V 中任一向量 v 可以唯一表示成 v_1+v_2,其中 $v_i \in V_i (i=1,2)$. 于是由下式规定的 σ 是 V 到 $V_1 \dotplus V_2$ 的映射:

$$\sigma(v_1 + v_2) = (v_1,v_2).$$

易验证 σ 是同构映射. 任取 $g \in G$,$(v_1,v_2) \in V_1 \dotplus V_2$,有

$$(\varphi_{V_1} \oplus \varphi_{V_2})(g)(v_1,v_2) = (\varphi_{V_1}(g)v_1, \varphi_{V_2}(g)v_2) = (\varphi(g)v_1, \varphi(g)v_2),$$
$$\begin{aligned}(\sigma\varphi(g)\sigma^{-1})(v_1,v_2) &= \sigma\varphi(g)(v_1 + v_2) \\ &= \sigma(\varphi(g)v_1 + \varphi(g)v_2) = (\varphi(g)v_1, \varphi(g)v_2),\end{aligned}$$

所以$(\varphi_{V_1} \oplus \varphi_{V_2})(g) = \sigma\varphi(g)\sigma^{-1}$. 这表明 $\varphi \approx \varphi_{V_1} \oplus \varphi_{V_2}$.

设 V 是 n 维向量空间,V_1 的维数为 m. 现在来看 φ 与 $\varphi_{V_1} \oplus \varphi_{V_2}$提供的矩阵表示之间的关系. 为此在 V_1 中取一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,$

α_m；在 V_2 中取一个基 $\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},\cdots,\alpha_n$. 于是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一个基；$((\alpha_1,0),\cdots,(\alpha_m,0),(0,\alpha_{m+1}),\cdots,(0,\alpha_n))$是 $V_1\dot{+}V_2$ 的一个基. 容易看出

$$\Phi(g)=\begin{bmatrix}\Phi_{V_1}(g) & 0\\ 0 & \Phi_{V_2}(g)\end{bmatrix},\quad \forall\ g\in G. \tag{6}$$

由(6)和(5)得到 $\Phi(g)=(\Phi_{V_1}\oplus\Phi_{V_2})(g),\forall\ g\in G$. 于是

$$\Phi=\Phi_{V_1}\oplus\Phi_{V_2}.$$

上述结论可以推广到 V 是 φ的有限多个非平凡的不变子空间的直和的情形.

2.3 线性表示和群同态的合成

设 φ: $G\to GL(V)$是群 G 的表示，设 T：$H\to G$ 是一个群同态. 显然，$\varphi\circ T$ 是群 H 的线性表示，并且 $\varphi\circ T$ 与 φ有相同的表示空间 V.

由表示和群同态的合成产生新表示的方法既简单又有用. 下面介绍一些具体应用.

1. 限制表示

设(φ,V)是群 G 的 K-表示，H 是 G 的子群. 显然含入映射 i：$H\hookrightarrow G$(即，$i(h)=h,\forall\ h\in H$)是群同态. 于是 $\varphi\circ i$ 是 H 的表示，称它为 φ在子群 H 上的**限制表示**，记作 $\varphi|H$.

2. 表示的提升(lifting)与分解(factoring)

设 N 是群 G 的正规子群，设(ψ,V)是商群 G/N 的表示，则 ψ 与自然同态 π 的合成 $\psi\circ\pi$ 是 G 的表示，称 $\psi\circ\pi$ 是 ψ 的**提升**. 显然 $\mathrm{Ker}(\psi\circ\pi)\supseteq N$.

反之，设(φ,V)是群 G 的表示，设 $N\lhd G$ 并且 $N\subseteq\mathrm{Ker}(\varphi)$. 规定商群 G/N 到 $GL(V)$的一个对应法则 $\tilde{\varphi}$ 为：

$$\tilde{\varphi}(gN):=\varphi(g),\quad \forall\ gN\in G/N. \tag{7}$$

容易验证 $\tilde{\varphi}$ 确实是映射. 显然 $\tilde{\varphi}$ 是商群 G/N 的表示，并且从(7)式

看出：$\tilde{\varphi}\circ\pi=\varphi$. 我们把从 φ 得到 $\tilde{\varphi}$ 称为是表示 φ 对于正规子群 N 的**分解**.

由上述讨论我们得到下述命题：

命题 1.2.1 设 N 是群 G 的正规子群，则在商群 G/N 的线性表示集合与 G 的其核包含 N 的线性表示集合之间存在一一对应：$(\tilde{\varphi},V)\mapsto(\varphi,V)$，其中 φ 是 $\tilde{\varphi}$ 的提升.

考虑命题 1.2.1 的特殊情形：V 是 1 维向量空间，并且取 $N=G'$，这里 G' 是 G 的换位子群. 则我们有下述命题：

命题 1.2.2 群 G 的 1 次 K-表示组成的集合与商群 G/G' 的 1 次 K-表示组成的集合之间存在一一对应，使得 G 的每个 1 次 K-表示是 G/G' 的某个 1 次 K-表示的提升.

证明 只要证：任给 G 的 1 次 K 表示 φ，都有 $\mathrm{Ker}\varphi\supseteq G'$. 现在任取 $g,h\in G$，有 $\varphi(ghg^{-1}h^{-1})=\varphi(g)\varphi(h)\varphi(g)^{-1}\varphi(h)^{-1}=1$，因此 $G'\subseteq\mathrm{Ker}\varphi$. ▌

由于商群 G/G' 是 abel 群，它的 1 次表示容易求出，从而群 G 的 1 次表示也就可以求出。下面看一个例子：

例 1.2.1 设 K 是特征不等于 2 的域，求 n 元对称群 S_n 的所有 1 次 K-表示.

解 $n=1$ 时，$S_1=\{(1)\}$，显然 S_1 的 1 次表示只有主表示。

$n=2$ 时，$S_2=\langle(12)\rangle$. 因为域 K 的特征不等于 2，所以 $-1\neq1$. 从而 -1 是本原 2 次单位根. 据例 1.1.1，S_2 恰有两个 1 次 K-表示：φ_0 和 φ_1，其中 $\varphi_0((12))=1$，即，φ_0 是主表示；而 $\varphi_1((12))=-1$.

当 $n\geqslant3$，S_n 是非 abel 群，我们利用命题 1.2.2 把问题归结为求 abel 群 S_n/S_n' 的 1 次 K-表示. 因为 A_n 可由所有 3 轮换生成，并且 $(ijk)=(ij)(ik)(ij)^{-1}(ik)^{-1}$，所以 $A_n\subseteq S_n'$. 又因为 S_n/A_n 是 2 阶循环群，所以 $A_n\supseteq S_n'$. 于是 $S_n'=A_n$. 从而 $S_n/S_n'=S_n/A_n=\langle(12)A_n\rangle$. 据上一段知，$S_n/S_n'$ 恰有两个 1 次 K-表示：ψ_0 和 ψ_1，其中 ψ_0 是主表示，$\psi_1((12)A_n)=-1$. 把它们提升便得到 S_n 的全部 1 次 K-表示：$\psi_0\circ\pi$ 和 $\psi_1\circ\pi$，其中 $\psi_0\circ\pi$ 是 S_n 的主表示；当 σ 是偶

置换时，$\psi_1\circ\pi(\sigma)=\psi_1(\sigma A_n)=\psi_1(A_n)=1$，当 σ 是奇置换时，

$$\psi_1\circ\pi(\sigma)=\psi_1(\sigma A_n)=\psi_1((12)A_n)=-1.$$

3. 通过群自同构的挠(twisted)表示

群 G 的表示 (φ,V) 与 G 的自同构 σ 的合成 $\varphi\circ\sigma$ 称为 φ 通过 σ 的**挠表示**，记作 φ^σ. 下面是挠表示的两个特殊情形：

(1) 通过群的内自同构的挠表示

给定 $a\in G$，a 确定了群 G 的一个内自同构 $\sigma(a)$，即 $\sigma(a)g=aga^{-1}$，$\forall\, g\in G$. 设 (φ,V) 是 G 的表示，则有 φ 通过 $\sigma(a)$ 的挠表示 $\varphi^{\sigma(a)}$. 容易证明：$\varphi^{\sigma(a)}\approx\varphi$.

(2) 共轭表示

设 N 是群 G 的正规子群，给定 $g\in G$，易验证映射 τ_g：$x\mapsto g^{-1}xg(\forall\, x\in N)$ 是 N 的自同构. 设 (ψ,V) 是 N 的表示，ψ 通过 τ_g 的挠表示 ψ^{τ_g} 称为 ψ 的**共轭表示**，并且简记作 ψ^g.

易验证：对于给定的 $g\in G$，映射 $\psi\mapsto\psi^g$ 是 N 的表示集合到其自身上的双射.

ψ 的共轭表示与 ψ 可能等价，也可能不等价. 记 $I(\psi)=I_G(\psi):=\{g\in G\mid\psi^g\approx\psi\}$. 易验证 $I(\psi)$ 是 G 的子群，称它为 ψ 在 G 中的**惯性群**(inertial group). 据(1)知，若 $a\in N$，则 $\psi^a\approx\psi$. 因此 $N\subseteq I(\psi)$.

2.4 逆步(contragredient)表示

设 (φ,V) 是群 G 的 K-表示. 考虑 V 的对偶空间 V^*. 给定 $g\in G$，我们定义 V^* 的一个变换 $\varphi^*(g)$，它把 V^* 的元素 f 映到如下定义的 $\varphi^*(g)f$：

$$(\varphi^*(g)f)(v):=f(\varphi(g^{-1})v),\quad\forall\, v\in V.\tag{8}$$

显然，$\varphi^*(g)f$ 是 V 上的函数，易验证它是线性函数，从而 $\varphi^*(g)$ 确实是 V^* 的一个变换. 易验证 $\varphi^*(g)$ 是 V^* 的可逆线性变换，于是 φ^* 是 G 到 $\mathrm{GL}(V^*)$ 的映射. 现在来证 φ^* 是同态. 我们有

$$(\varphi^*(gh)f)(v)=f(\varphi((gh)^{-1})v)$$
$$=f(\varphi(h^{-1})(\varphi(g^{-1})v)),\quad \forall\, v\in V;$$
$$((\varphi^*(g)\varphi^*(h))f)(v)=(\varphi^*(g)(\varphi^*(h)f))(v)$$
$$=(\varphi^*(h)f)(\varphi(g^{-1})v)$$
$$=f(\varphi(h^{-1})(\varphi(g^{-1})v)),\quad \forall\, v\in V.$$

因此 $\varphi^*(gh)f=(\varphi^*(g)\varphi^*(h))f,\forall\, f\in V^*$. 从而 $\varphi^*(gh)=\varphi^*(g)\cdot\varphi^*(h)$. 所以 φ^* 是同态，从而 (φ^*,V^*) 是群 G 的线性表示，称它为 (φ,V) 的**逆步表示**. 我们知道，当 V 是有限维时，V 的对偶空间 V^* 与 V 有相同的维数，从而 φ^* 与 φ 有相同的次数.

当 (φ,V) 的表示空间 V 是有限维时，我们来看逆步表示 φ^* 提供的矩阵表示. 在 V 中取一个基 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，设 $(f_1,f_2,\cdots,f_n)$ 是 V^* 中的对偶基，即它满足

$$f_i(\alpha_j)=\delta_{ij},\quad \forall\, 1\leqslant i,j\leqslant n,$$

这里 δ_{ij} 是克罗内克符号，即

$$\delta_{ij}:=\begin{cases}1, & 当\ i=j,\\ 0, & 当\ i\neq j.\end{cases}$$

设 φ 在 V 的上述基下提供的矩阵表示为 Φ，φ^* 在对偶基下提供的矩阵表示为 Φ^*，对每个 $g\in G$，$\Phi(g)=(a_{ij}(g))$，$\Phi^*(g)=(b_{ij}(g))$. 为书写简便，我们把 $a_{ij}(g)$ 简写成 a_{ij}，把 $b_{ij}(g)$ 简写成 b_{ij}. 利用(8)式得到

$$(\varphi^*(g)f_i)(\varphi(g)\alpha_j)=f_i(\varphi(g^{-1})(\varphi(g)\alpha_j))=f_i(\alpha_j)=\delta_{ij}. \tag{9}$$

因为 $\varphi^*(g)f_i=\sum\limits_{k=1}^{n}b_{ki}f_k,\varphi(g)\alpha_j=\sum\limits_{l=1}^{n}a_{lj}\alpha_l$，我们有

$$\begin{aligned}(\varphi^*(g)f_i)(\varphi(g)\alpha_j)&=\Big(\sum_{k=1}^{n}b_{ki}f_k\Big)\Big(\sum_{l=1}^{n}a_{lj}\alpha_l\Big)\\&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}b_{ki}a_{lj}f_k(\alpha_l)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}b_{ki}a_{lj}\delta_{kl}=\sum_{k=1}^{n}b_{ki}a_{kj}.\end{aligned} \tag{10}$$

从(9)和(10)得到 $\sum\limits_{k=1}^{n}b_{ki}a_{kj}=\delta_{ij}$，即，$(\Phi^*(g))'\Phi(g)=I$，其中 I 是

单位矩阵.由此得出 $\Phi^*(g)=((\Phi(g))')^{-1}$,这里记号 A' 是矩阵 A 的转置.

在本书的第四章和第五章中,我们将继续介绍由已知的表示构造新表示的另一些方法.

习 题 1.2

1. 设群 G 在集合 $\Omega=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上有一个作用,由这个作用引起的 G 在域 K 上的置换表示记作(φ,V),其中 $V=\left\{\sum_{i=1}^{n}a_ix_i \mid a_i\in K,i=1,2,\cdots,n\right\}$.令

$$V_1=\left\langle\sum_{i=1}^{n}x_i\right\rangle,\quad V_2=\left\{\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\,\middle|\,\sum_{i=1}^{n}a_i=0,a_i\in K\right\},$$

说明 V_1 与 V_2 都是 φ 的不变子空间;证明:若域 K 的特征不能整除 n,则 $V=V_1\oplus V_2$,从而 $\varphi\approx\varphi_{V_1}\oplus\varphi_{V_2}$.

2. 利用第1题,求出对称群 S_3 的一个2次复表示.

3. 域 K 上所有 n 级矩阵组成的集合记作 $M_n(K)$,它是 K 上的 n^2 维向量空间.对于每一个 $A\in\mathrm{GL}_n(K)$,规定

$$\varphi(A)X:=AXA^{-1},\quad\forall\, X\in M_n(K).$$

(1) 说明 φ 是群 $\mathrm{GL}_n(K)$ 的 n^2 次 K-表示;

(2) 说明域 K 上迹为零的 n 级矩阵组成的集合 $M_n^0(K)$ 是 φ 的不变子空间;说明 K 上 n 级纯量矩阵组成的集合 $\langle I\rangle$ 是 φ 的不变子空间;

(3) 证明:若域 K 的特征不能整除 n,则

$$M_n(K)=\langle I\rangle\oplus M_n^0(K).$$

4. 实数域 $\boldsymbol{R}$ 上所有 n 级正交矩阵组成的集合对于矩阵乘法构成的群称为 n 级正交群,记作 $O(n)$.对于每个 $A\in O(n)$,规定 $\varphi(A)X:=XA^{-1},\forall\, X\in M_n(\boldsymbol{R})$.显然 φ 是 $O(n)$ 的 n^2 次实表示.迹为零的 n 级对称矩阵组成的集合记作 $M_n^+(\boldsymbol{R})$,n 级反对称矩阵组成的集合记作 $M_n^-(\boldsymbol{R})$.

(1) 证明 $M_n^+(\boldsymbol{R})$与 $M_n^-(\boldsymbol{R})$都是 $O(n)$不变子空间；

(2) 证明 $M_n(\boldsymbol{R})=\langle I\rangle\oplus M_n^+(\boldsymbol{R})\oplus M_n^-(\boldsymbol{R})$；

(3) 求 $O(n)$的一个$\frac{1}{2}n(n-1)$次实表示.

5. 设 K 是域，说明 φ_m: $t\mapsto t^m(t\in K^*)$是群 K^*的 1 次 K-表示，这里 m 是正整数. 利用 φ_m 求群 $GL_n(K)$的 1 次 K-表示.

6. 交错群 A_4 的换位子群是 Klein 四元群 $V_4=\{e,(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$，求 A_4 的所有 1 次复表示.

7. 对称群 S_4 有一个正规子群 $N=\{e,(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$，证明 $S_4/N\cong S_3$. 求 S_4 的一个 2 次复表示.

8. 求 Klein 四元群 $V_4=\{e,a,b,ab\}$的所有 1 次复表示.

9. 设(φ,V)和(ψ,W)是群 G 的两个 K-表示，V 与 W 都是有限维的，证明：$(\varphi\oplus\psi)^*\approx\varphi^*\oplus\psi^*$.

§3 不可约表示，表示的完全可约性

群表示论的基本问题之一是要描绘给定的一个抽象群在一个给定域上的所有有限维线性表示，并且在等价的意义下对它们进行分类. 通过本节我们将看到：有限群 G 在特征不能整除$|G|$的域上的每一个有限维线性表示是完全可约的；而有限维完全可约表示能分解成有限多个不可约子表示的直和. 因此这时，问题归结为研究有限群 G 的所有不可约表示.

定义 1 群 G 的一个 K-表示(φ,V)称为是**不可约的**，如果 V 没有非平凡的 G 不变子空间；否则称为是**可约的**.

现在用矩阵的语言来看上述概念：如果群 G 的 n 次 K-表示(φ,V)是可约的，则 V 至少有一个非平凡的 G 不变子空间 U. 据§2，对于从 U 的基扩充而成的 V 的基，φ 提供的矩阵表示 Φ 具有形式：

$$\begin{pmatrix} A(g) & C(g) \\ 0 & B(g) \end{pmatrix},\quad \forall g\in G, \tag{1}$$

其中主对角线上的子矩阵是方阵. 反之,如果 G 的表示 φ 在 V 的某一个基下提供的矩阵表示 Φ 具有形式(1),则 V 有非平凡的 G 不变子空间,从而 φ 可约. 由此可见,如果 G 的表示 (φ,V) 不可约,则 V 中不存在具有上述性质的基.

显然,1 次表示是不可约的.

例 1.3.1 在例 1.1.2 中,p 阶群 $G=\langle g\rangle$ 在特征 p 的域 K 上的 2 次矩阵表示 Φ 具有形式(1),因此它是可约的.

下面我们将举出次数大于 1 的不可约表示的例子.

命题 1.3.1 群 G 在域 K 上的表示 (φ,V) 有 1 维 G 不变子空间的充分必要条件是,所有 $\varphi(g)\,(g\in G)$ 有公共的特征向量.

证明 充分性是显然的. 现在证必要性. 设 V 有 1 维 G 不变子空间 $U=\langle\alpha\rangle$. 任给 $g\in G$,有 $\varphi(g)\alpha\in U$,从而得 $\varphi(g)\alpha=k(g)\alpha$,其中 $k(g)\in K$. 这表明 α 是 $\varphi(g)$ 的特征向量. 由 g 的任意性,即得 α 是所有 $\varphi(g)$ 的公共特征向量. ▎

例 1.3.2 在例 1.1.3 中给出了 3 阶循环群 $G=\langle g\rangle$ 在任一域 K 上的 2 次矩阵表示 Φ. 取一个域 K 上的 2 维向量空间 V,则 Φ 可看成 G 的线性表示 (φ,V) 对于一个基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 提供的矩阵表示. 我们来讨论 φ 是否不可约. 据命题 1.3.1,φ 可约的充分必要条件是 $\varphi(g)$ 和 $\varphi(g^2)$ 有公共的特征向量. 易求出 $\varphi(g)$ 的特征多项式是 $f(\lambda)=\lambda^2+\lambda+1$. 因为 $(\lambda^2+\lambda+1)(\lambda-1)=\lambda^3-1$,所以 $f(\lambda)$ 的根是 3 次单位根.

情形 1　设域 K 包含本原 3 次单位根 ω. 因为 $\omega\neq 1$,所以 $f(\omega)=0$. 同理得 $f(\omega^2)=0$. 于是 ω,ω^2 都是 $\varphi(g)$ 的特征值. 设 α 是 $\varphi(g)$ 的属于 ω 的特征向量. 因为 $\varphi(g^2)=\varphi(g)^2$,所以 α 是 $\varphi(g^2)$ 的属于特征值 ω^2 的特征向量. 从而 φ 可约.

情形 2　设域 K 不包含本原 3 次单位根. 这时 $f(\lambda)$ 在 K 中或者没有根,或者根为 1. 若为前者,则 $\varphi(g)$ 没有特征值,从而没有特征向量,于是 φ 不可约. 若为后者,则 K 的特征为 3,此时 $\varphi(g)$ 的特征值是 1(二重),它的全部特征向量是 $k(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$,其中 k 是 K

中任意非零元. 因为 $\varphi(g^2)=\varphi(g)^2$，所以 $\varepsilon_1+\varepsilon_2$ 也是 $\varphi(g^2)$的属于 1 的特征向量. 从而 φ 可约.

例 1.3.2 表明一个表示的不可约性与所取的域有关. 在此例中，若 K 为实数域，则 φ 不可约；若 K 为复数域，则 φ 可约. 可见，在扩张域时有可能失去表示的不可约性. 自然要研究在什么条件下扩张域能保持表示的不可约性，这将在第四章的分裂域一节中详细讨论.

例 1.3.3 对称群 S_n 在 n 元集合 $\Omega=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上有一个自然作用：$\sigma\circ x_i=x_{\sigma(i)}, i=1,2,\cdots,n$. 这个作用引起 S_n 在域 K 上的 n 次置换表示，记作(φ,V)，其中

$$V=\left\{\sum_{i=1}^{n}a_ix_i \mid a_i\in K,\quad i=1,2,\cdots,n\right\}.$$

令 $V_1=\left\langle\sum x_i\right\rangle, V_2=\left\{\sum a_ix_i \mid \sum a_i=0\right\}$. 据习题 1.2 的第 1 题知，$V_1$ 与 V_2 都是 φ 的不变子空间；并且如果域 K 的特征不能整除 n，则 $V=V_1\oplus V_2$，从而 $\varphi\approx\varphi_{V_1}\oplus\varphi_{V_2}$. 由于 $\dim V_1=1$，因此 φ_{V_1} 是 1 次的. 又由于 $\varphi_{V_1}(\sigma)\left(\sum x_i\right)=\sum x_{\sigma(i)}=\sum x_i$，因此 $\varphi_{V_1}(\sigma)$ 是 V_1 的恒等变换，$\forall\ \sigma\in S_n$. 从而 $\mathrm{Ker}\varphi_{V_1}=S_n$，这说明 φ_{V_1}是 S_n 的主表示. 现在来证 φ_{V_2}是 S_n 的 $n-1$ 次不可约 K 表示：显然 $\deg\varphi_{V_2}=n-1$. 假设 U 是 φ_{V_2}的非零不变子空间，在 U 中取一非零向量 $u=\sum a_ix_i$. 因为 $u\notin V_1$，于是 u 的坐标向量中至少有两个分量不相等，不妨设 $a_1\neq a_2$. 于是

$$\begin{aligned}\varphi_{V_2}((12))u-u&=(a_1x_2+a_2x_1)-(a_1x_1+a_2x_2)\\&=(a_2-a_1)(x_1-x_2).\end{aligned}$$

因为 U 的不变性，我们有 $\varphi_{V_2}((12))u-u\in U$，从而 $x_1-x_2\in U$. 仍由 U 的不变性，得 $\varphi_{V_2}(\sigma)(x_1-x_2)=x_{\sigma(1)}-x_{\sigma(2)}\in U$. 当 σ 取 S_n 的各个元素时便可得形如 x_i-x_j 的向量都属于 U，而 V_2 可由 $x_1-x_2,x_1-x_3,\cdots,x_1-x_n$ 生成，因此 $U=V_2$. 这说明 φ_{V_2}只有平凡的不变子空间，所以 φ_{V_2}不可约.

由例 1.3.3 得到下述命题：

命题 1.3.2 若域 K 的特征不能整除 n，则对称群 S_n 在域 K 上的 n 次置换表示等价于主表示与一个 $n-1$ 次不可约表示的直和. ▮

如果群 G 的表示 (φ,V) 是不可约的（可约的），则称 V 是**不可约（可约）G-空间**或者**不可约（可约）G-模**.

现在我们来讨论 §2 构造的新表示与原来表示在不可约性方面的关系.

命题 1.3.3 设 (φ,V) 是群 G 的 K-表示，T 是群 H 到 G 的群同态. 如果 H 的表示 $\varphi\circ T$ 不可约，则 φ 也不可约. 如果 T 是满同态，则反之亦然.

证明 假如 φ 可约，则 V 有非平凡的 G 不变子空间 U. 任取 $h\in H$，有 $T(h)\in G$，从而有

$$(\varphi\circ T(h))u = \varphi(T(h))u \in U, \quad \forall\, u \in U.$$

因此 U 是 H 不变子空间，从而 $\varphi\circ T$ 可约.

现在设 T 是满同态. 假如 $\varphi\circ T$ 可约，则 V 有非平凡的 H 不变子空间 W. 任取 $g\in G$，由于 T 是满射，则存在 $h\in H$ 使得 $g=T(h)$. 从而有

$$\varphi(g)w = \varphi(T(h))w = (\varphi\circ T(h))w \in W, \quad \forall\, w \in W.$$

因此 W 是 G 不变子空间，从而 φ 可约. ▮

下面列举命题 1.3.3 在几个特殊情形中的应用.

(1) 设 (φ,V) 是群 G 的 K-表示，H 是 G 的真子群. 如果 $\varphi|H$ 不可约，则 φ 不可约. 反之，如果 φ 不可约，那末 $\varphi|H$ 有可能可约.

(2) 设 (φ,V) 是群 G 的 K-表示，则 φ 通过 G 的自同构 σ 的挠表示 φ^σ 不可约当且仅当 φ 不可约.

(3) 设 N 是群 G 的正规子群，(ψ,V) 是 N 的 K-表示，则 ψ 的共轭表示 ψ^g 不可约当且仅当 ψ 不可约，其中 $g\in G$.

(4) 设 $(\bar{\varphi},V)\mapsto(\varphi,V)$ 是商群 G/N 的 K-表示集合到 G 的其核包含 N 的 K-表示集合之间的一一对应，其中 φ 是 $\bar{\varphi}$ 的提升，则

φ不可约当且仅当$\tilde{\varphi}$不可约.

第(4)点说明：从商群 G/N 的所有不可约 K-表示经过提升便得到 G 的所有其核包含 N 的不可约 K-表示.

命题 1.3.4 设(φ,V)是群 G 的 n 次 K-表示，则 φ 的逆步表示 φ^* 不可约当且仅当 φ 不可约.

证明 假如 φ^* 可约，则 V^* 中有非平凡的 G 不变子空间 U_2. 考虑 V 的如下子集：

$$U_2^0 := \{v \in V \mid f(v) = 0, \ \forall\, f \in U_2\}. \tag{2}$$

显然 U_2^0 是 V 的线性子空间. 还可证明 U_2^0 是 G 不变子空间：对每个 $g\in G$，任取 $u\in U_2^0$，任取 $f\in U_2$，因为 U_2 是 φ^* 的不变子空间，因此 $\varphi^*(g^{-1})f\in U_2$. 从而有

$$f(\varphi(g)u) = (\varphi^*(g^{-1})f)(u) = 0, \tag{3}$$

这说明 $\varphi(g)u\in U_2^0$，因此 U_2^0 是 φ 的不变子空间. 在 U_2 中取一个基 $(f_1,f_2,\cdots,f_m)$，则 $u\in U_2^0 \Longleftrightarrow f_i(u)=0, i=1,2,\cdots,m$. 据齐次线性方程组的解的结构理论得到 $\dim U_2^0=n-m=\dim V-\dim U_2$. 因为 U_2 非平凡，由上式得 U_2^0 也非平凡. 于是 φ 可约.

假如 φ 可约，则 V 中有非平凡的 G 不变子空间 U_1. 考虑 V^* 的如下子集：

$$U_1^0 := \{f \in V^* \mid f(u) = 0, \ \forall\, u \in U_1\}. \tag{4}$$

显然 U_1^0 是 V^* 的线性子空间. 对每个 $g\in G$，任意 $u\in U_1$，由 U_1 的不变性得 $\varphi(g^{-1})u\in U_1$. 从而对任意 $f\in U_1^0$，有 $(\varphi^*(g)f)u=f(\varphi(g^{-1})u)=0$. 于是 $\varphi^*(g)f\in U_1^0$，这表明 U_1^0 是 φ^* 的不变子空间. 在 U_1 中取一个基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$，则 $f\in U_1^0 \Longleftrightarrow f(\alpha_i)=0, i=1,2,\cdots,r$. 于是仍由齐次线性方程组的解的结构理论得，

$$\dim U_1^0 = n - r = \dim V^* - \dim U_1.$$

从而由 U_1 非平凡得出 U_1^0 非平凡，因此 φ^* 可约. ▌

注 在上一段中，若把 U_1 的基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$ 扩充成 V 的基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n\}$，再在 V^* 中取对偶基 $\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$，那

么由(4)式定义的U_1^0恰好是由$f_{r+1},f_{r+2},\cdots,f_n$生成的子空间.

与不可约表示有联系但也有区别的一个概念是不可分解表示.

定义 2 群G的线性表示(φ,V)称为**可分解的**,如果V能表成两个非平凡的G不变子空间的直和;否则称为**不可分解的**.

每一个可分解的表示是可约的,因为它有非平凡的G不变子空间.但是一个可约表示不一定是可分解的.例如在例 1.3.2 中,当域K的特征是 3 时,3 阶循环群$G=\langle g\rangle$的 2 次K表示(φ,V)是可约的,但它是不可分解的.这是因为假如它可分解,则V可表成两个 1 维G不变子空间的直和.据命题 1.3.1 得,$\varphi(g)$有两个线性无关的特征向量,可是事实上$\varphi(g)$的全部特征向量是$k(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$,$k\in K^*$.矛盾.在例 1.3.2 中,若$K$包含本原 3 次单位根,则$(\varphi,V)$可约,并且它可分解,这是因为$\varphi(g)$有两个不同的特征值:$\omega$和$\omega^2$,从而$\varphi(g)$有两个线性无关的特征向量,它们也是$\varphi(g^2)$的特征向量,据命题 1.3.1 即得$(\varphi,V)$可分解.

什么情形下可约的表示一定可分解?或者说,什么情形下不可分解表示一定不可约?弄清楚这个问题对于研究群表示的结构很重要.为此先引进一个概念:

定义 3 群G在域K上的线性表示(φ,V)称为是**完全可约的**,如果对于V的每一个G不变子空间U都有G不变补空间W,即,存在G不变子空间W使得$V=U\oplus W$.

按照定义 3,每一个不可约表示是完全可约的,因为$V=0\oplus V$.而可约的表示不一定是完全可约的,例如在例 1.3.2 中当域K的特征为 3 时,G的表示(φ,V)是可约的,但它不是完全可约的.

如果群G的K-表示(φ,V)可约并且是完全可约,则V可表成两个非平凡的G不变子空间的直和:$V=U\oplus W$,从而φ等价于两个子表示φ_U与φ_W的直和.当V是有限维时,在U,W中分别取一个基,合起来成为V的基,φ_U,φ_W,φ分别对于这些基所提供的矩阵表示Φ_U,Φ_W,Φ满足

$$\Phi(g) = \begin{pmatrix} \Phi_U(g) & 0 \\ 0 & \Phi_W(g) \end{pmatrix}, \quad \forall g \in G.$$

§2 构造的新表示与原表示的完全可约性有如下关系：

命题 1.3.5 设(φ,V)是群G的K-表示，T是群H到G的满同态，则H的表示$\varphi \circ T$完全可约当且仅当G的表示φ完全可约.

证明留给读者.

由于命题 1.3.5 成立，于是在命题 1.3.3 后面列举的 4 个结论中，(2)—(4)把"不可约"换成"完全可约"仍然成立. 不难证明在命题 1.3.4 中把"不可约"换成"完全可约"也仍然成立.

定理 1.3.1 完全可约表示的每一个子表示也是完全可约的.

证明 设(φ,V)是群G的完全可约表示，φ_U是φ的任一子表示. 在U中任取一个G不变子空间U_1，由于φ完全可约，所以U_1在V中有G不变的补空间W，即$V=U_1\oplus W$. 由此得$U=U_1\oplus(W\cap U)$. 由于G不变子空间的交仍是G不变的，因此$W\cap U$是G不变的. 从而φ_U是完全可约的. ▌

定理 1.3.2 群G的有限维完全可约表示一定可分解成有限多个不可约子表示的直和.

证明 对表示空间的维数n作归纳法. 假设对于维数小于n时结论成立，现在看G的n次完全可约表示(φ,V). 如果φ是不可约的，则结论显然成立(此时$\varphi=\varphi$). 如果φ可约，则φ有非平凡的不变子空间. 在V的所有非零的G不变子空间中挑一个维数最小的，设为U，于是φ_U是不可约的. 由于φ完全可约，所以V中有G不变子空间W使$V=U\oplus W$. 据定理 1.3.1 得，φ_W是完全可约的. 由于$\dim W<\dim V$，由归纳假设得φ_W可分解成有限多个不可约子表示的直和，添上φ_U即得φ可分解成有限多个不可约子表示的直和. ▌

定理 1.3.2 说明：有限维的完全可约表示可以从不可约表示

用最简单的构造法——直和得到.那么什么情形下一个群的所有有限维线性表示都是完全可约的呢？这个问题的解决也就回答了什么情形下有限维的可约表示一定可分解的问题.现在我们对有限群来回答这一问题，在本书的最后一章将对一类无限群——紧致拓扑群回答这一问题.

定理 1.3.3(**Maschke**) 有限群 G 在特征不能整除 $|G|$ 的域 K 上的每一个有限维线性表示都是完全可约的.

证明 设 (φ, V) 是 G 在域 K 上的有限维线性表示，若 φ 不可约，则它是完全可约的.下面设 φ 可约，任取 V 的一个非平凡 G 不变子空间 U，它在 V 中有补空间 U'，但 U' 不一定是 G 不变的.考虑 V 沿 U 到 U' 的投影 $f: u+u' \mapsto u'$，$\forall\ u \in U, u' \in U'$.显然有：对每个 $v \in V$，$v-f(v) \in U$；$f(u)=0$，$\forall\ u \in U$；$f^2=f$.现在定义 V 的一个变换如下：

$$f_G := |G|^{-1} \sum_{h \in G} \varphi(h) f \varphi(h^{-1}),$$

这里 $|G|^{-1}$ 是指 $(|G| \cdot 1)^{-1}$，由于域 K 的特征不能整除 $|G|$，所以 $|G| \cdot 1 \neq 0$，从而它有逆元.显然 f_G 是 V 的线性变换.

对每个 $g \in G$，我们有

$$\begin{aligned}\varphi(g) f_G \varphi(g^{-1}) &= |G|^{-1} \sum_{h \in G} \varphi(g) \varphi(h) f \varphi(h^{-1}) \varphi(g^{-1}) \\ &= |G|^{-1} \sum_{h \in G} \varphi(gh) f \varphi((gh)^{-1}) \\ &= |G|^{-1} \sum_{t \in G} \varphi(t) f \varphi(t^{-1}) = f_G,\end{aligned}$$

于是 $\varphi(g) f_G = f_G \varphi(g)$，$\forall\ g \in G$.令 $W=f_G(V)$.因为 f_G 与 $\varphi(g)$ 可交换，所以 f_G 的值域 W 是 $\varphi(g)$ 的不变子空间.又由于这对一切 $g \in G$ 成立，因此 W 是 G 不变子空间.

剩下的是证明 $V=U \oplus W$.先证 $V=U+W$.任 $v \in V$，有 $f_G(v) \in W$，下面来证 $v-f_G(v) \in U$.因为对一切 $v \in V$ 有 $v-f(v) \in U$，所以 $\varphi(h^{-1})v - f(\varphi(h^{-1})v) \in U$.由于 U 是 G 不变子空间，因此

$$v - \varphi(h) f \varphi(h^{-1}) v = \varphi(h)(\varphi(h^{-1}) v - f \varphi(h^{-1}) v) \in U.$$

由于$(|G|\cdot 1)^{-1}|G|=1$,因此$v=|G|^{-1}\sum_{h\in G}v$. 从而

$$v-f_G(v)=|G|^{-1}\sum_{h\in G}(v-\varphi(h)f\varphi(h^{-1})v)\in U.$$

所以$V=U+W$.

其次要证$U\cap W=\{0\}$. 任给$u\in U$,有

$$f_G(u)=|G|^{-1}\sum_{h\in G}\varphi(h)f(\varphi(h^{-1})u)=|G|^{-1}\sum_{h\in G}\varphi(h)0=0.$$

任意$v\in V$,由于$v-f_G(v)\in U$,从上式结论得

$$f_G(v)-f_G^2(v)=f_G(v-f_G(v))=0,$$

于是$f_G^2=f_G$. 现在设$v\in U\cap W$,因为$v\in U$,所以$f_G(v)=0$. 因为$v\in W$,所以存在$v'\in V$使得$f_G(v')=v$. 于是

$$v=f_G(v')=f_G^2(v')=f_G(f_G(v'))=f_G(v)=0.$$

所以$V=U\oplus W$. 这就证明了φ是完全可约的. ▌

当域K的特征整除群G的阶时,G的可约表示不一定是完全可约的. 例如,例1.3.1中的p阶循环群G在特征为p的域K上的2次矩阵表示是可约的,但它不可分解,因此不是完全可约的.

作为Maschke定理的应用,我们来证明一个有用的结果.

例1.3.4 有限非abel群在特征不能整除群的阶的域上的任一忠实的2次表示是不可约的.

证明 设(φ,V)是有限非abel群G在特征不能整除$|G|$的域K上的忠实2次表示. 假如φ可约,则V有1维G不变子空间U. 据Maschke定理,φ完全可约. 从而V中有1维G不变子空间W使得$V=U\oplus W$. 设$U=\langle\alpha\rangle$,$W=\langle\beta\rangle$,则α,β是V的一个基. φ在此基下提供的矩阵表示Φ具有形式

$$\Phi(g)=\begin{pmatrix}a(g)&0\\0&b(g)\end{pmatrix},\quad\forall g\in G,\tag{5}$$

其中$a(g),b(g)\in K$. 任取$g,h\in G$,由(5)得$\Phi(g)\Phi(h)=\Phi(h)\Phi(g)$,于是$\Phi(gh)=\Phi(hg)$. 因为$\varphi$是忠实的,由此推出$gh=hg$. 这与$G$是非abel群矛盾. 所以$\varphi$不可约. ▌

习 题 1.3

1. 设 φ 是一般线性群 $GL_n(K)$ 在向量空间 $V=K^n$ 上的如下定义的表示：$\varphi(A)\alpha:=A\alpha, \forall \alpha\in V, A\in GL_n(K)$. 说明 φ 是忠实的，并且是不可约的.

2. 域 K 上所有 n 级矩阵组成的集合记作 $M_n(K)$，它是 K 上的 n^2 维向量空间. 任给 $A\in GL_n(K)$，规定

$$\psi(A)X = AX, \quad \forall X \in M_n(K).$$

(1) 说明 ψ 是 $GL_n(K)$ 的 n^2 次 K 表示；

(2) 对于 $1\leqslant j\leqslant n$，设 $M_n^{(j)}(K)$ 是除第 j 列外其余元素全为零的 n 级矩阵组成的集合，说明 $M_n^{(j)}(K)$ 是 $GL_n(K)$ 不变子空间. 设 ψ_j 是 ψ 在 $M_n^{(j)}(K)$ 上的子表示，证明：ψ_j 不可约，并且 $\psi\approx\psi_1\oplus\cdots\oplus\psi_n$.

3. 在习题 1.2 的第 3 题中，取 $K=\boldsymbol{C}, n=2$. 证明群 $GL_2(\boldsymbol{C})$ 在子空间 $M_2^0(\boldsymbol{C})$ 上的子表示是不可约的.

4. 在例 1.1.2 中，取一个 2 维向量空间 V，把 Φ 看成是 G 的一个线性表示 φ 对于 V 的一个基 α_1,α_2 提供的矩阵表示. 证明：φ 是不可分解的.

5. 证明本节的命题 1.3.5.

6. 设 K 是特征不等于 3 的域，写出 S_3 的一个 2 次不可约 K-表示以及它所提供的矩阵表示.

7. 设 H 是群 G 的子群，且 $[G:H]$ 有限. 设域 K 的特征不能整除 $[G:H]$. 设 (φ,V) 是 G 的 K-表示. 证明：如果 $\varphi|H$ 是完全可约的，则 φ 是完全可约的.

§4 酉表示和正交表示

上一节在证明 Maschke 定理时，关键是对于 V 的一个非平凡 G 不变子空间 U，要找一个 G 不变补空间 W. 由于 U 的一个线性

补空间不一定是G不变的，因此我们定义了G上的一个“平均”变换f_G，然后证明f_G的值域是G不变的并且是U的补空间．如果所考虑的域K是实数域（或复数域），并且对于一切$g\in G$，$\varphi(g)$都是对于V的某一个内积的正交变换（或酉变换），即，$\varphi(g)$保持这个内积不变，那么很容易证明U的正交补$U^{\perp}$是G不变的．当然随之而来的一个问题是：任给线性表示(φ,V)，V中有没有这样的内积使得对于一切$g\in G$，$\varphi(g)$都是正交变换（或酉变换）？本节就来讨论这个问题．

定义1　群G的一个有限维复（实）线性表示(φ,V)称为**酉（正交）表示**，如果在空间V中存在一个内积使得对于这个内积所成的酉（欧几里得）空间中，每一个$\varphi(g)(g\in G)$都是酉（正交）变换．这样的内积称为**G不变内积**．

定义2　群G的一个n次复（实）矩阵表示Φ称为**酉（正交）**表示，如果每一个矩阵$\Phi(g)(g\in G)$都是酉（正交）矩阵．

定理1.4.1　有限群的每一个有限维复线性表示都可以成为酉表示．

证明　设(φ,V)是有限群G的一个有限维复线性表示．在V中任取一个内积$f(\alpha,\beta)$．从$f(\alpha,\beta)$通过在“G上取平均”得到一个二元函数：

$$(\alpha,\beta):=|G|^{-1}\sum_{g\in G}f(\varphi(g)\alpha,\varphi(g)\beta). \tag{1}$$

对一切$\alpha,\beta\in V$，$k_1,k_2\in\mathbf{C}$，我们有

$$\begin{aligned}(\beta,\alpha)&=|G|^{-1}\sum_{g\in G}f(\varphi(g)\beta,\varphi(g)\alpha)\\&=|G|^{-1}\sum_{g\in G}\overline{f(\varphi(g)\alpha,\varphi(g)\beta)}\\&=\overline{(\alpha,\beta)};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\beta)&=|G|^{-1}\sum_{g\in G}f(\varphi(g)(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2),\varphi(g)\beta)\\&=|G|^{-1}\sum_{g\in G}[k_1f(\varphi(g)\alpha_1,\varphi(g)\beta)+k_2f(\varphi(g)\alpha_2,\varphi(g)\beta)]\end{aligned}$$

$$= k_1(\alpha_1,\beta) + k_2(\alpha_2,\beta);$$

$$(\alpha,\alpha) = |G|^{-1}\sum_{g\in G} f(\varphi(g)\alpha,\varphi(g)\alpha) \geqslant 0,$$

并且$(\alpha,\alpha)=0$当且仅当$f(\varphi(g)\alpha,\varphi(g)\alpha)=0,\forall\ g\in G$,而这等价于$\varphi(g)\alpha=0,\forall\ g\in G$,这又等价于$\alpha=0$.

上述表明(1)式定义的二元函数(α,β)是V的一个内积.对一切$g\in G$,我们有

$$\begin{aligned}(\varphi(g)\alpha,\varphi(g)\beta) &= |G|^{-1}\sum_{h\in G} f(\varphi(h)\varphi(g)\alpha,\varphi(h)\varphi(g)\beta)\\ &= |G|^{-1}\sum_{h\in G} f(\varphi(hg)\alpha,\varphi(hg)\beta)\\ &= |G|^{-1}\sum_{t\in G} f(\varphi(t)\alpha,\varphi(t)\beta)\\ &= (\alpha,\beta).\end{aligned}$$

因此对于内积(α,β),所有$\varphi(g)$都是酉变换.从而(φ,V)是G的酉表示,其中V成为定义了内积(α,β)的酉空间. ▍

类似地可以证明有限群G的每一个有限维实线性表示都可以成为正交表示.

定理 1.4.2 有限群的每一个有限维复(实)线性表示是完全可约的.

证明 由 Maschke 定理立即得到结论.但是这里我们给出另一个证法.

设(φ,V)是有限群G的一个有限维复(实)线性表示.在V中取G不变内积(它的存在性已经在定理 1.4.1 中证明),V成为酉空间(欧几里得空间).设U是V的任意一个G不变子空间,则$V=U\oplus U^{\perp}$.我们来证$U^{\perp}$是G不变的:任取$\alpha\in U^{\perp}$,任取$g\in G$.对于任意$u\in U$,因为U是G不变的,所以$\varphi(g^{-1})u\in U$,记$u'=\varphi(g^{-1})u$,则$\varphi(g)u'=u$.于是

$$(u,\varphi(g)\alpha) = (\varphi(g)u',\varphi(g)\alpha) = (u',\alpha) = 0.$$

从而$\varphi(g)\alpha\in U^{\perp}$.这表明$U^{\perp}$是$G$不变的.因此$(\varphi,V)$完全可约. ▍

习 题 1.4

1. 写出 S_3 的一个 2 次不可约酉表示.

2. 习题 1.1 的第 7 题的群$(\mathbf{Z},+)$的 1 次复表示何时不是酉表示.

3. 写出 2 级特殊正交群 SO(2)的一个 1 次忠实酉表示.

§5 Abel 群的表示

本节讨论的表示都是有限维的.

定理 1.5.1 设 G 是有限 abel 群,其**指数**为 m(即,G 中所有元素的阶的最小公倍数). 如果域 K 包含一个本原 m 次单位根,则 G 的每一个不可约 K-表示是 1 次的.

证明 设(φ,V)是 G 的一个不可约 K-表示. 任取 $g\in G$,有 $g^m=e$. 于是 $\varphi(g)^m=1_V$. 从而 x^m-1 是 $\varphi(g)$的零化多项式. 因为 K 包含本原 m 次单位根 ξ,所以 x^m-1 在 K 中恰有 m 个不同的根:1,$\xi,\cdots,\xi^{m-1}$. 从而 $\varphi(g)$有特征值. 设 λ 是 $\varphi(g)$的一个特征值. 因为 G 是 abel 群,所以有

$$(\varphi(g)-\lambda 1_V)\varphi(h)=\varphi(h)(\varphi(g)-\lambda 1_V),\quad \forall h\in G.$$

于是 $\varphi(g)-\lambda 1_V$ 的核是 G 不变子空间. 由于(φ,V)不可约并且 $\mathrm{Ker}[\varphi(g)-\lambda 1_V]\neq 0$,所以 $\mathrm{Ker}[\varphi(g)-\lambda 1_V]=V$. 从而 $\varphi(g)-\lambda 1_V=0$,即 $\varphi(g)$是数乘变换. 由 g 的任意性知,任一非零向量是所有 $\varphi(g)$的公共特征向量. 据命题 1.3.1 得,(φ,V)有 1 维 G 不变子空间. 由于(φ,V)不可约,所以 $\dim_K V=1$. ∎

注意 设 G 是指数为 m 的有限群,如果域 K 包含本原 m 次单位根,则 K 的特征一定不能整除 $|G|$. 理由如下:假如域 K 的特征 p 整除 $|G|$,则 $p\mid m$. 于是可设 $m=p^r m'$,其中$(m',p)=1$ 并且 $r>0$. 在 $K[x]$中有 $x^m-1=x^{p^r m'}-1=(x^{m'}-1)^{p^r}$. 于是 K 所包含的本原 m 次单位根 ξ 也满足 $\xi^{m'}=1$,矛盾.

域 K 称为**代数封闭域**，如果在 $K[x]$中每一个多项式都能分解成一次因式的乘积.

定理 1.5.2 如果 K 是代数封闭域，则 abel 群(可以是无限群)的每一个不可约 K-表示都是 1 次的.

证明 设(φ,V)是 abel 群 G 的不可约 K-表示，因为 K 是代数封闭域，所以 $\varphi(g)$有特征值. 以下同定理 1.5.1 证法. ▌

现在我们来求有限 abel 群 G 的所有 1 次 K-表示，其中 K 是包含本原 m 次单位根的域，m 是 G 的指数.

设

$$G=\langle g_1\rangle\times\langle g_2\rangle\times\cdots\times\langle g_s\rangle,$$

其中 g_i 的阶是 $p_i^{a_i}(i=1,2,\cdots,s)$. 设 ε_i 是本原 $p_i^{a_i}$ 次单位根，因为 $p_i^{a_i}|m$，并且 K 包含本原 m 次单位根，所以 $\varepsilon_i\in K(i=1,2,\cdots,s)$.

设 φ 是 G 的 1 次 K-表示，则 φ 是 G 到 K^* 的群同态. 任给 $1\leqslant i\leqslant s$，据例 1.1.1，φ 在子群$\langle g_i\rangle$上的限制表示把 g_i 映到 $\varepsilon_i^{r_i}$，其中 $0\leqslant r_i<p_i^{a_i}$. 又由于 φ 是群同态，因此，对于 G 中任一元素 $g_1^{t_1}g_2^{t_2}\cdots g_s^{t_s}$，其中 $0\leqslant t_i<p_i^{a_i}$，我们有

$$\varphi(g_1^{t_1}g_2^{t_2}\cdots g_s^{t_s})=\varepsilon_1^{r_1t_1}\varepsilon_2^{r_2t_2}\cdots\varepsilon_s^{r_st_s}. \tag{1}$$

这说明 G 的任意一个 1 次 K-表示具有形式(1).

反之，任意取定 G 中一个元素 $g=g_1^{r_1}g_2^{r_2}\cdots g_s^{r_s}$，其中 $0\leqslant r_i<p_i^{a_i}$，$i=1,2,\cdots,s$，我们定义 G 到 K^* 的一个映射 φ_g 如下：

$$\varphi_g(g_1^{t_1}g_2^{t_2}\cdots g_s^{t_s})=\varepsilon_1^{r_1t_1}\varepsilon_2^{r_2t_2}\cdots\varepsilon_s^{r_st_s},\quad 0\leqslant t_i<p_i^{a_i}(i=1,2,\cdots,s).$$

显然 φ_g 是群同态，因此 φ_g 是 G 的 1 次 K-表示. 如果取 G 的另一个元素 $g'=g_1^{r'_1}g_2^{r'_2}\cdots g_s^{r'_s}$，其中 $0\leqslant r'_i<p_i^{a_i}(i=1,2,\cdots,s)$，则按此方法得到 G 的另一个 1 次 K-表示 $\varphi_{g'}$. 若 $g'\neq g$，则至少存在一个下标 j 使得 $r'_j\neq r_j$，于是

$$\varphi_{g'}(g_j)=\varepsilon_j^{r'_j}\neq\varepsilon_j^{r_j}=\varphi_g(g_j),$$

这说明 $\varphi_{g'}\neq\varphi_g$. 于是按此方法我们得到了 G 的 $|G|$ 个不同的 1 次 K-表示. 由于 G 的任一 1 次 K-表示都具有形式(1)，因此上述 $|G|$

个 1 次 K-表示就是 G 的全部 1 次 K-表示. 又由于 G 的两个 1 次 K-表示等价当且仅当它们作为映射是相等的，因此 G 共有 $|G|$ 个两两不等价的 1 次 K-表示. 于是我们得到了下面的定理 1.5.3 的前半部分.

定理 1.5.3 如果域 K 包含本原 m 次单位根，其中 m 是有限 abel 群 G 的指数，则 G 的两两不等价的 1 次 K-表示的数目等于 G 的阶；用 $\hat{G}$ 表示 G 的所有 1 次 K-表示组成的集合，规定其中的乘法运算为：

$$(\varphi_1\varphi_2)(g) = \varphi_1(g)\varphi_2(g), \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \hat{G},\ g \in G,$$

则 $\hat{G}$ 成为一个群，并且 $G \cong \hat{G}$. 称 $\hat{G}$ 是 G 在 K 上的**特征标群**.

证明 前半部分已证. 现在证后半部分. 上面已说明映射 $g \mapsto \varphi_g$ 是双射，只剩下验证这个映射保持运算：任取 G 中两个元素 $g = g_1^{r_1} g_2^{r_2} \cdots g_s^{r_s}$，$h = g_1^{l_1} g_2^{l_2} \cdots g_s^{l_s}$，我们有

$$\varphi_{gh}(g_1^{t_1} g_2^{t_2} \cdots g_s^{t_s}) = \varepsilon_1^{(r_1+l_1)t_1} \varepsilon_2^{(r_2+l_2)t_2} \cdots \varepsilon_s^{(r_s+l_s)t_s},$$

$$\begin{aligned}(\varphi_g\varphi_h)(g_1^{t_1} g_2^{t_2} \cdots g_s^{t_s}) &= \varphi_g(g_1^{t_1} g_2^{t_2} \cdots g_s^{t_s})\varphi_h(g_1^{t_1} g_2^{t_2} \cdots g_s^{t_s}) \\ &= \varepsilon_1^{r_1t_1} \varepsilon_2^{r_2t_2} \cdots \varepsilon_s^{r_st_s} \varepsilon_1^{l_1t_1} \varepsilon_2^{l_2t_2} \cdots \varepsilon_s^{l_st_s},\end{aligned}$$

由此看出 $\varphi_{gh} = \varphi_g\varphi_h$. 所以映射 $g \mapsto \varphi_g$ 是同构. ▌

从定理 1.5.3 和命题 1.2.2 立即得到

推论 1.5.1 设 G 是有限群，设 G/G' 的指数为 m，如果域 K 包含本原 m 次单位根，则 G 的两两不等价的 1 次 K-表示的数目等于 $[G:G']$.

例 1.5.1 求 Klein 四元群 $G = \{e, a, b, ab\}$ 的全部不等价的不可约 K-表示，其中域 K 的特征不等于 2.

解 Klein 四元群 G 的指数为 2. 因为域 K 的特征不等于 2，所以 -1 是本原 2 次单位根，显然 $-1 \in K$. 据定理 1.5.1，G 的不可约 K-表示都是 1 次的. 据定理 1.5.3，G 有 4 个不等价的 1 次 K-表示，它们是

$$\varphi_e(a^ib^j) = (-1)^{0\cdot i}(-1)^{0\cdot j} = 1,$$

$$\varphi_a(a^ib^j) = (-1)^{1\cdot i}(-1)^{0\cdot j} = (-1)^i,$$
$$\varphi_b(a^ib^j) = (-1)^{0\cdot i}(-1)^{1\cdot j} = (-1)^j,$$
$$\varphi_{ab}(a^ib^j) = (-1)^{1\cdot i}(-1)^{1\cdot j} = (-1)^{i+j},$$
其中 $0\leqslant i,j\leqslant 1$.

从 Maschke 定理、定理 1.3.2、定理 1.5.1 以及定理 1.5.3，我们得到

定理 1.5.4 设 G 是指数为 m 的 n 阶 abel 群，如果域 K 包含本原 m 次单位根，则 G 的每一个有限维 K-表示 (φ,V) 等价于 G 的有限多个 1 次 K-表示的直和. 设 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 是 G 的所有不等价的 1 次 K-表示，则

$$\varphi\approx a_1\varphi_1\oplus a_2\varphi_2\oplus\cdots\oplus a_n\varphi_n,$$

其中 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是非负整数，并且若 $a_i>0$，则

$$a_i\varphi_i := \underbrace{\varphi_i\oplus\varphi_i\oplus\cdots\oplus\varphi_i}_{a_i},$$

a_i 称为 φ_i 在 φ 中的重数.（在第三章 §2 将证明这些重数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是由 φ 唯一决定的，与分解式无关）. ▌

习 题 1.5

1. 设 G 是(2,4)型 8 阶 abel 群，域 K 包含本原 4 次单位根 ε，求 G 的所有不等价的不可约 K-表示.

2. 设域 K 的特征不等于 2，求 8 阶初等 abel 群（即，型为(2,2,2)的 abel 群）的所有不等价的不可约 K-表示.

3. 设域 K 包含本原 3 次单位根 ω，求 9 阶初等 abel 群的所有不等价的不可约 K-表示.

4. 设 G 是 p^n 阶初等 abel 群，其中 p 是素数；设域 K 包含本原 p 次单位根. 证明：如果 φ 是 G 的非平凡的不可约 K-表示，则 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的阶为 p^{n-1}.

5. 证明：如果 φ 是有限群 G 的 1 次 K-表示，则 $G/\mathrm{Ker}\varphi$ 是循环群.

6. 证明：非循环的有限群没有忠实的 1 次 K-表示.

7. 设 G 是有限 abel 群，它的指数为 m；域 K 包含本原 m 次单位根，证明：如果 G 有一个忠实的不可约 K-表示，则 G 是循环群.

8. 设 $G=\langle a\rangle$ 是 6 阶循环群，说明 G 有 2 次不可约 $\boldsymbol{Q}$-表示，其中 $\boldsymbol{Q}$ 是有理数域.

（**提示**：设 ζ 是复数域里的本原 3 次单位根. 令 $V=\boldsymbol{Q}(\zeta)$，则 V 是 $\boldsymbol{Q}$ 上 2 维向量空间. 考虑 G 到 $\mathrm{GL}(V)$ 的映射 φ: $a^i \mapsto \varphi(a^i)$，其中 $\varphi(a^i)$ 被规定为 $\varphi(a^i)v:=\zeta^i v, \forall\, v\in V$，其中 $\zeta^i v$ 是 $\boldsymbol{Q}(\zeta)$ 里的乘法. 证明 (φ, V) 是 G 的不可约 $\boldsymbol{Q}$-表示.）

9. 说明 p 阶循环群有 p-1 次不可约 $\boldsymbol{Q}$-表示，其中 p 是素数.

第二章　有限群的表示

在第一章第五节我们完全决定了指数为 m 的有限 abel 群在包含本原 m 次单位根的域上的有限维表示：每一个表示等价于有限多个 1 次表示的直和；不同的(亦即不等价的)1 次表示的数目等于群的阶；并且我们构造了所有 1 次表示.

这一章要讨论一般有限群在特征不能整除群的阶的域上的有限维表示. 根据 Maschke 定理，每一个有限维表示等价于有限多个不可约表示的直和. 于是我们要研究的是：群 G 有多少个不等价的不可约表示？每一个不可约表示的次数是多少？能不能构造出 G 的所有不等价的不可约表示？

§1　群的表示与群代数上的模的关系

我们在证明指数为 m 的有限 abel 群在包含本原 m 次单位根的域上的每一个不可约表示都是 1 次的时候，主要是要对表示空间 V 进行讨论，证明 V 是 1 维的. 现在我们讨论一般有限群的有限维表示时，也是首先来分析表示空间的特性.

群 G 在域 K 上的一个线性表示(φ,V)是由表示空间 V 和 G 到 $GL(V)$的群同态 φ 组成. 既然 G 到 $GL(V)$(它是集合 V 的全变换群的子群)有一个群同态 φ，那么群 G 在集合 V 上就有一个作用：$gv := \varphi(g)v, \forall\, g\in G, v\in V$；它具有下述性质：

1) $(gh)v=g(hv), \forall\, g,h\in G, v\in V$；

2) $ev=v, \forall\, v\in V$，e 是 G 的单位元；

3) $g(v_1+v_2)=gv_1+gv_2, \forall\, v_1,v_2\in V, g\in G$；

4) $g(kv)=k(gv), \forall\, v\in V, k\in K, g\in G$.

定义 1　设 G 是一个群. 域 K 上的向量空间 V 称为 **G-模**，如

果 G 在 V 上有一个作用具有上述四条性质.

上述讨论表明：若给了群 G 在域 K 上的一个线性表示 (φ, V)，则表示空间 V 就是一个 G-模，其中 $gv := \varphi(g)v$.

反之，若给了一个 G-模 V，我们可以定义群 G 到 V 的全变换群的一个映射 φ 为：$\varphi(g)v := gv, \forall g \in G, v \in V$. 由性质 3)和 4)可推出 $\varphi(g)$ 是向量空间 V 的线性变换；由性质 1)可推出 φ 保持乘法，即 $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h), \forall g, h \in G$；由性质 2)可推出 $\varphi(e) = 1_V$；进而可推出 $\varphi(g)$ 是可逆变换，$\forall g \in G$. 因此 φ 是 G 到 $GL(V)$ 的群同态，从而 (φ, V) 是 G 的一个线性表示，称它是由 G-模 V 提供的表示.

定义 2 设 G 是一个群. 域 K 上的两个 G-模 V 和 W 称为**同构**，如果存在向量空间 V 到 W 的一个同构 σ 使得

$$g\sigma(v) = \sigma g(v), \quad \forall v \in V, g \in G. \tag{1}$$

显然，域 K 上两个 G-模同构当且仅当它们提供的表示等价. 因此研究群 G 的线性表示与研究 G-模是一回事. 但是如果停留在 G-模这个代数结构上，我们得不到比直接研究 G 的线性表示更多的信息，只不过是语言不同罢了. 为了给研究群 G 的 K-表示提供强有力的工具，我们需要研究**群代数 $K[G]$ 上的模**.

我们先复习模的概念，然后介绍代数、群代数的概念.

1.1 模

定义 3 设 M 是 abel 加法群，R 是有单位元的环（单位元记作 1），如果对每一个 $r \in R$，每一个 $m \in M$，乘积 $rm \in M$ 被定义，并且满足下述四条性质：

1) $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2, \forall r \in R, m_1, m_2 \in M$;

2) $(r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m, \forall r_1, r_2 \in R, m \in M$;

3) $(r_1 r_2)m = r_1(r_2 m), \forall r_1, r_2 \in R, m \in M$;

4) $1m = m, \forall m \in M$,

则称 M 是**左 R-模**或者**环 R 上的左模**.

类似地可以定义**右 R-模**.

定义 4 设 R 是有单位元的环,则加法群 R 可成为左 R-模,只要定义 ra 是环 R 里的乘积. 称 R 为**左正则 R-模**.

定义 5 左 R-模 M 的非空子集 N 称为 M 的**子模**,如果 N 是加法群 M 的子群,并且从 $r\in R$ 和 $y\in N$ 可以推出 $ry\in N$.

显然,$\{0\}$,M 都是模 M 的子模,它们称为平凡的.

定义 6 若左 R-模 $M\neq(0)$没有非平凡的子模,则称 M 是**不可约模**或**单模**;否则称 M 为**可约模**或**非单模**.

不难看出,设 R 是有单位元的环,I 是 R 的非空子集,则 I 是左正则 R-模的子模当且仅当 I 是环 R 的左理想.

定义 7 设 N 是左 R-模 M 的子模,规定环 R 在商群 M/N 上的作用如下

$$r(x+N)\ :=rx+N,\quad \forall\, r\in R, x\in M,$$

(不难验证这个定义与陪集代表的选择无关),则 M/N 成为左 R-模,称它是 M 对于子模 N 的**商模**.

定义 8 设 M 和 M' 都是左 R-模,如果 M 到 M' 的群同态 η 还满足:$\eta(rx)=r\eta(x)(\forall\, r\in R, x\in M)$,则称 η 是 M 到 M' 的**模同态**或 **R-同态**. 此时把群同态 η 的核称为**模同态 η 的核**,记作 $\mathrm{Ker}\eta$. 模同态 η 若是双射,则称为**模同构**或 **R-同构**.

左 R-模 M 到 M' 的模同态 η 的核 $\mathrm{Ker}\eta$ 是 M 的子模,**η 的像(或称为值域)**$\mathrm{Im}\eta$ 是 M' 的子模.

命题 2.1.1 设 N 是左 R-模 M 的子模,则自然映射 π: $x\mapsto x+N$ $(\forall\, x\in M)$是满的 R-同态,且 $\mathrm{Ker}\pi=N$.

定理 2.1.1(模同态基本定理) 设 M,M'是左 R-模,η 是 M 到 M' 的模同态,则

$$M/\mathrm{Ker}\eta\cong\mathrm{Im}\eta\quad(\text{模同构}).$$

显然,若$\{N_i\mid i\in I\}$是左 R-模 M 的一族子模,则$\bigcap\limits_{i\in I}N_i$ 是 M 的子模.

设 $N_1,N_2,\cdots,N_s$ 是左 R-模 M 的子模,则加法子群 N_1,N_2,

$\cdots,N_s$ 的和 $N_1+N_2+\cdots+N_s$ 是左 R-模 M 的子模.

定义 9 设 $N_1,N_2,\cdots,N_s$ 是左 R-模 M 的子模，如果

(i) $M=N_1+\cdots+N_s$;

(ii)从 $y_1+\cdots+y_s=0,y_i\in N_i(i=1,2,\cdots,s)$ 可以推出 $y_1=y_2=\cdots=y_s=0$,

则称 M 是子模 $N_1,N_2,\cdots,N_s$ 的**(内)直和**，记作

$$M=N_1\oplus N_2\oplus\cdots\oplus N_s.$$

定义 10 设$\{M_i|i\in I\}$是环 R 上的左模 M 的一族子模(可能有无限多个)，易验证下述集合

$$\{x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_n}|x_{i_j}\in M_{i_j},i_j\in I,\quad j=1,2,\cdots,n,n\text{ 是任意正整数}\}$$

是 M 的子模，称它是 M 的**一族子模$\{M_i|i\in I\}$的和**，记作 $\sum\limits_{i\in I}M_i$.

定义 11 设$\{M_i|i\in I\}$是左 R-模 M 的一族子模，如果 $M=\sum\limits_{i\in I}M_i$ 并且每一个 $m\in M$ 能够被唯一表成

$$m=m_{i_1}+\cdots+m_{i_r},\quad m_{i_j}\in M_{i_j},$$

则称 **M 是这一族子模$\{M_i|i\in I\}$的(内)直和**，记作

$$M=\bigoplus_{i\in I}M_i.$$

定义 12 设 $M_1,M_2,\cdots,M_s$ 是一组左 R-模，令

$$M=\{(m_1,m_2,\cdots,m_s)|m_i\in M_i,i=1,2,\cdots,s\},$$

规定

$$(m_1,m_2,\cdots,m_s)+(m_1',m_2',\cdots,m_s')=(m_1+m_1',m_2+m_2',\cdots,m_s+m_s'),$$

$$r(m_1,m_2,\cdots,m_s)=(rm_1,rm_2,\cdots,rm_s),$$

则 M 成为左 R-模，称 M 是 $M_1,M_2,\cdots,M_s$ 的**外直和**，记作

$$M=M_1\dotplus M_2\dotplus\cdots\dotplus M_s.$$

若令 $M_i'=\{(0,\cdots,0,m_i,0,\cdots,0)|m_i\in M_i\}$，则 M_i' 是 M 的子模，并且 $M_i'\cong M_i,i=1,2,\cdots,s$，而且

$$M_1 + M_2 + \cdots + M_s = M = M_1' \oplus M_2' \oplus \cdots \oplus M_s'.$$

命题 2.1.2 设 N_1, N_2 是左 R-模 M 的子模，如果 $M = N_1 \oplus N_2$，则 $M/N_1 \cong N_2, M/N_2 \cong N_1$（模同构）.

命题 2.1.3 若左 R-模 M 是它的子模 $N_1, N_2, \cdots, N_s$ 的（内）直和，而且每个 N_i 又是子模 $N_{i1}, N_{i2}, \cdots, N_{il_i}$ 的（内）直和，则 M 是子模 $N_{ij_i}(i=1,2,\cdots,s; j_i=1,2,\cdots,l_i)$ 的（内）直和.

命题 2.1.4 若左 R-模 M 是子模 $N_1, N_2, \cdots, N_s$ 的（内）直和，令 $M_1 = N_1 + \cdots + N_{r_1}, M_2 = N_{r_1+1} + \cdots + N_{r_2}, \cdots, M_t = N_{r_{t-1}+1} + \cdots + N_s$，则 M 是 $M_1, M_2, \cdots, M_t$ 的（内）直和.

从命题 2.1.4 和命题 2.1.2 得到：如果左 R-模 M 是它的子模 $N_1, N_2, \cdots, N_s$ 的（内）直和，即 $M = N_1 \oplus \cdots \oplus N_s$，则

$$M/(N_2 \oplus \cdots \oplus N_s) \cong N_1.$$

定义 13 左 R-模 M 称为**完全可约的**，如果对于 M 的每一个子模 N 都存在 M 的子模 L 使得 $M = N \oplus L$.

定义 14 设 M 是左 R-模，令

$$\operatorname{ann}(M) := \{r \in R \mid rx = 0, \forall x \in M\},$$

称 $\operatorname{ann}(M)$ 是 **M 的零化子**. 显然，$\operatorname{ann}(M)$ 是 R 的双边理想.

定义 15 设 M 是左 R-模，对于 $x \in M$，令

$$\operatorname{ann}(x) := \{r \in R \mid rx = 0\},$$

称 $\operatorname{ann}(x)$ 是 **x 的零化子**. 易验证 $\operatorname{ann}(x)$ 是环 R 的左理想.

不难验证

$$\operatorname{ann}(M) = \bigcap_{x \in M} \operatorname{ann}(x).$$

1.2 代数

定义 16 域 K 上的一个代数 A 是一个环 A，它同时又是域 K 上的向量空间，并且向量空间的数量乘法与环的乘法满足

$$k(ab) = (ka)b = a(kb), \quad \forall a, b \in A, k \in K. \tag{2}$$

若 A 是 K 上无限维向量空间，则称代数 A 是**无限维的**；否则称 A

是**有限维代数**,并且把 A 作为向量空间的维数,称为**代数 A 的维数**.

若域 K 上的代数 A 作为环具有单位元素 $1(\neq 0)$,则称 A 是有单位元的代数.本书所讨论的代数都是有单位元的,不再每次声明.

定义 17 设 A 和 B 都是域 K 上的代数,A 到 B 的映射 f 如果满足对一切 $a_1,a_2\in A$,一切 $k\in K$ 都有

$$f(a_1+a_2)=f(a_1)+f(a_2),$$
$$f(a_1a_2)=f(a_1)f(a_2),$$
$$f(ka)=kf(a),$$
$$f(1)=1',$$

其中 1 和 $1'$ 分别是 A 和 B 的单位元,则称 f 是 A 到 B 的**代数同态**.

定义 18 设 A 是域 K 上的代数,V 是 K 上的有限维向量空间,**代数 A 的一个线性表示 T** 是 A 到 $\mathrm{Hom}_K(V,V)$ 的代数同态,其中 $\mathrm{Hom}_K(V,V)$ 是 V 的所有线性变换组成的代数. V 称为**表示空间**,V 的维数称为**表示 T 的次数**.

定义 19 域 K 上的代数 A 的两个表示 (T,V) 和 (T',V') 称为是**等价的**,如果存在向量空间的同构 $\sigma:V\to V'$ 使得

$$T'(a)=\sigma T(a)\sigma^{-1},\quad \forall\, a\in A.$$

定义 20 域 K 上的代数 A 的一个 n 次**矩阵表示**是 A 到 $M_n(K)$ 的代数同态,其中 $M_n(K)$ 是域 K 上所有 n 级矩阵组成的代数.

类似地可给出 A 的两个矩阵表示等价的定义.

1.3 代数上的模

设 A 是域 K 上的代数,若 M 是环 A 上的左模,则称 M 是**代数 A 上的左模或左 A-模**.

命题 2.1.5 设 A 是域 K 上的代数,M 是左 A-模,则

(i) M 可被定义成域 K 上的向量空间；

(ii) (i)中定义的数量乘法满足：$k(am)=(ka)m=a(km)$，$\forall\, a\in A, k\in K, m\in M$；

(iii) M 的子模是向量空间 M 的线性子空间.

证明 (i) 定义数量乘法为：$km \ := (k1)m$，$\forall\, m\in M, k\in K$，其中 1 是 A 的单位元. 易验证 M 是域 K 上的向量空间.

(ii) $k(am)=(k1)(am)=(k1\cdot a)m=(k(1a))m=(ka)m$,

$$k(am)=(k1)(am)=(k1\cdot a)m=(a\cdot k1)m$$
$$=a((k1)m)=a(km).$$

(iii) 直接验证即可. ▌

命题 2.1.5 说明代数上的模比环上的模具有更多的代数结构性质.

1.4 群代数

设 G 是有限群，K 是域. 在第一章 §1 讲有限群的正则表示时，我们已经构造了域 K 上的一个 $|G|$ 维向量空间，它的元素是形如 $\sum\limits_{g\in G}a_g g$，其中 $a_g\in K$. 这个向量空间记作 $K[G]$. 如果我们把 $1\cdot g+\sum\limits_{h\neq g}0\cdot h$ 与 g 等同，那么群 G 的所有元素是向量空间 $K[G]$ 的一个基. 现在我们在 $K[G]$ 中规定一个乘法：

$$\Big(\sum_{g\in G}a_g g\Big)\Big(\sum_{h\in G}b_h h\Big) := \sum_{g\in G}\sum_{h\in G}a_g b_h gh = \sum_{t\in G}c_t t,$$

其中 $c_t=\sum\limits_{g\in G}a_g b_{g^{-1}t}$. 容易验证 $K[G]$ 对于这个乘法和以前定义的加法成为一个环，$1e$ 是这个环的单位元素（其中 e 是 G 的单位元素），以后我们把环 $K[G]$ 的单位元素就写作 1. 显然 $K[G]$ 的数量乘法与环的乘法满足关系式(2)，因此 $K[G]$ 成为域 K 上的代数，称它是群 G 在域 K 上的**群代数**，它的维数等于 $|G|$.

群代数 $K[G]$ 的一个线性表示 T 是 $K[G]$ 到 $\mathrm{Hom}_K(V,V)$ 的代数同态，其中 V 是域 K 上的一个有限维向量空间. 现在我们来

分析表示空间 V 具有的性质. 令 $av := T(a)v, \forall a \in K[G], v \in V$. 于是对一切 $a, a_1, a_2 \in K[G], v, v_1, v_2 \in V, k \in K$ 有

$$a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2, \tag{3}$$

$$a(kv) = k(av) = (ka)v, \tag{4}$$

$$(a_1 + a_2)v = a_1v + a_2v, \tag{5}$$

$$(a_1a_2)v = a_1(a_2v), \tag{6}$$

$$1v = v. \tag{7}$$

(3)、(5)、(6)、(7)表明 V 是左 $K[G]$-模(这里 $K[G]$ 看成环); 添上(4)式表明 V 是代数 $K[G]$ 上的左模. 由此可见, 群代数 $K[G]$ 的线性表示 (T, V) 的表示空间 V 是代数 $K[G]$ 上的左模.

反之, 若 V 是群 G 在域 K 上的群代数 $K[G]$ 上的左模, 则 V 自然地可定义为域 K 上的向量空间. 我们定义 $K[G]$ 到 $\mathrm{Hom}_K(V, V)$ 的一个映射 T, 使得对一切 $a \in K[G]$ 有 $T(a)v := av, \forall v \in V$. 由定义 3 的性质 1)和命题 2.1.5 的(ii)知, $T(a)$ 是 V 的线性变换; 由定义 3 性质 2)知 T 保持加法; 由性质 3)知 T 保持乘法; 由命题 2.1.5 的(ii)知 T 保持数量乘法; 由性质 4)知 T 把 $K[G]$ 的单位元映成 $\mathrm{Hom}_K(V, V)$ 的单位元. 因此 T 是代数同态, 从而 T 是群代数 $K[G]$ 的一个表示, 称 T 是左 $K[G]$-模 V 提供的表示.

不难看出, 群代数 $K[G]$ 上的两个左模是模同构当且仅当它们提供的表示是等价的.

综上所述, 研究群代数 $K[G]$ 的有限维线性表示与研究群代数 $K[G]$ 上的有限维左模(即, 这左模作为域 K 上的向量空间是有限维的)是一回事. 由于研究群代数 $K[G]$ 上的左模的结构可以充分利用群代数 $K[G]$ 的结构性质, 这就为研究群代数 $K[G]$ 的线性表示提供了有力的工具.

那么有限群 G 的有限维 K-表示与群代数 $K[G]$ 的有限维表示之间有什么联系呢?

命题 2.1.6 有限群 G 的有限维 K-表示组成的集合与群代数 $K[G]$ 的有限维表示组成的集合之间存在一一对应.

证明 设(φ,V)是G在域K上的有限维表示，则V是G-模，即$gv:=\varphi(g)v,\forall g\in G,v\in V$. 对于$K[G]$中任一元素$\sum_{g\in G}a_g g$，规定$\left(\sum_{g\in G}a_g g\right)v:=\sum_{g\in G}a_g(gv)$，容易验证$V$成为群代数$K[G]$上的左模，它提供代数$K[G]$的一个有限维表示，记作$\varphi^*$. 易看出

$$\varphi^*\left(\sum_{g\in G}a_g g\right)=\sum_{g\in G}a_g\varphi(g).$$

反之，设(φ^*,V)是$K[G]$的一个有限维表示，把它限制到G上便产生G的一个K-表示. 显然映射$\varphi\mapsto\varphi^*$是单射. ▎

上述证明的前半部分表明一个G-模V可以扩充成$K[G]$上的左模V.

命题2.1.6告诉我们，为了研究有限群G的有限维K-表示只要去研究群代数$K[G]$的有限维表示，也即只要研究群代数$K[G]$上的有限维左模.

命题2.1.7 设G是有限群，K是域，则

(i) G的两个K-表示(φ,V)和(ψ,W)等价当且仅当两个左$K[G]$-模V和W是模同构；

(ii) U是G的K-表示(φ,V)的不变子空间当且仅当U是左$K[G]$-模V的子模；

(iii) 若左$K[G]$-模V是它的子模$V_1,V_2,\cdots,V_m$的直和，设V,V_i提供的G的表示是$\varphi,\varphi_i(i=1,2,\cdots,m)$，则

$$\varphi\approx\varphi_1\oplus\varphi_2\oplus\cdots\oplus\varphi_m;$$

(iv) G的K-表示(φ,V)不可约(可约，完全可约)当且仅当左$K[G]$-模V不可约(可约，完全可约)；

(v) G的正则表示的表示空间$K[G]$可成为左正则$K[G]$-模；反之，左正则$K[G]$-模$K[G]$提供的G的表示就是G的正则表示.

证明留给读者. 命题2.1.7说明：为了决定G的所有不等价的不可约K-表示就只要决定所有不同构的不可约左$K[G]$-模.

习 题 2.1

1. 证明命题 2.1.7.

2. 域 K 上的代数 A 的非空子集 B 称为 A 的子代数，如果 B 是环 A 的含 A 的单位元的子环，又是向量空间 A 的子空间.

对于域 K 上的代数 A，令

$$B = \{c \in A \mid ca = ac, \quad \forall\, a \in A\},$$

证明：B 是 A 的子代数，称它是**代数 A 的中心**，记作 $Z(A)$.

3. 设 G 是有限群，K 是域. 证明：$\sum_{g\in G} g$ 属于 $Z(K[G])$. 任取 G 的一个共轭元素类 C，证明 $\sum_{x\in C} x$ 属于 $Z(K[G])$.

4. 设 G 是有限群，$\boldsymbol{Q}$ 是有理数域. 令

$$e_1 = |G|^{-1}\sum_{g\in G} g, \quad e_2 = 1 - e_1,$$

其中 1 是 $\boldsymbol{Q}[G]$ 的单位元. 证明：

(i) $e_1^2 = e_1, e_2^2 = e_2, \quad e_1e_2 = e_2e_1 = 0$;

(ii) $e_1\boldsymbol{Q}[G], e_2\boldsymbol{Q}[G]$ 是 $\boldsymbol{Q}[G]$ 的子代数，也是环 $\boldsymbol{Q}[G]$ 的双边理想；

(iii) $\boldsymbol{Q}[G] = e_1\boldsymbol{Q}[G] \oplus e_2\boldsymbol{Q}[G]$.

5. 设 G 是无限群，K 是域，所有有限和 $\sum_{g\in G} a_g g$（即，其中只有有限多项系数不为 0）组成的集合记作 $K[G]$，类似于有限群的情形，规定 $K[G]$ 中元素的相等以及加法、数量乘法、乘法，则 $K[G]$ 成为 K 上的无限维代数. 如果把

$$1 \cdot g + \sum_{h\neq g} 0 \cdot h$$

等同于 g，那么群 G 的全体元素是 $K[G]$ 的一个基. 类似于有限群的情形，若 (φ, V) 是 G 的一个 K-表示，则 V 可以成为左 $K[G]$-模.

设 G 是 abel 群，(φ, V) 是 G 的一个 K-表示，证明：对于任意 $g\in G$，$\varphi(g)$ 是左 $K[G]$-模 V 的模自同构.

§2 有限维半单代数的结构和它的不可约模

上一节我们指出：为了研究有限群 G 的有限维 K-表示就只要去研究群代数 $K[G]$ 上的有限维左模；为了决定 G 的所有不等价的不可约 K-表示就只要去决定所有不同构的不可约 $K[G]$-模.

根据 Maschke 定理，当域 K 的特征不能整除群 G 的阶时，G 的每一个有限维表示是完全可约的. 从而每一个有限维左 $K[G]$-模是完全可约的. 这一节我们要讨论具有这种性质的域 K 上有限维代数的结构以及它的所有不同构的不可约左模的数目和不可约左模的维数(作为域 K 上向量空间的维数).

我们讨论的环都是具有单位元 $1(\neq 0)$ 的环.

2.1 幂等元

定义 1 对于环 A，令

$$Z(A) := \{c \in A \mid cx = xc, \forall\ x \in A\},$$

则 $Z(A)$ 是 A 的子环并且含有 A 的单位元，称 $Z(A)$ 是 A 的**中心**.

如果 A 是域 K 上的代数，则环 A 的中心 $Z(A)$ 称为**代数 A 的中心**.

定义 2 设 A 是域 K 上的代数，A 的子集 B 称为 A 的**子代数**，如果 B 是环 A 的含 A 的单位元的子环，并且是向量空间 A 的线性子空间.

易看出，域 K 上代数 A 的中心 $Z(A)$ 是 A 的子代数.

定义 3 环 A 的一个元素 e 称为**幂等元**如果 $e^2=e\neq 0$. 两个幂等元 e_1, e_2 称为**正交的**，如果 $e_1e_2=e_2e_1=0$. A 的幂等元 e 称为**本原的**，如果它不能表成 A 的两个正交幂等元的和. A 的幂等元 e 称为**中心幂等元**，如果 $e\in Z(A)$. A 的幂等元 e 称为**中心本原的**，如果 $e\in Z(A)$ 并且 e 不能表成 A 的两个正交中心幂等元的和.

为了研究域 K 上有限维代数 A 的不可约左模，需要研究左正

则 A-模 A 的直和分解. 在这一小节我们首先讨论环 A 上左正则模 A 的直和分解与幂等元的关系.

引理 2.2.1 如果环 A 上左正则模 A 能分解成有限多个非零子模 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ 的直和，即

$$A = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n. \tag{1}$$

设 $1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$，其中 $e_i \in V_i (1 \leqslant i \leqslant n)$，则 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 A 的一组两两正交的幂等元，并且 V_i 由幂等元 e_i 生成，即 $V_i = Ae_i (i = 1, 2, \cdots, n)$. 反之，如果 $\{e_1, e_2, \cdots, e_s\}$ 是 A 的一组两两正交的幂等元，则 $A(e_1 + e_2 + \cdots + e_s) = Ae_1 \oplus Ae_2 \oplus \cdots \oplus Ae_s$.

证明 任取 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$，由已知条件得

$$\begin{aligned} e_i = e_i \cdot 1 &= e_i(e_1 + e_2 + \cdots + e_n) \\ &= e_ie_1 + \cdots + e_i^2 + \cdots + e_ie_n, \end{aligned}$$

并且 $e_ie_j \in V_j (j = 1, 2, \cdots, n)$. 由于(1)式是直和，因此 e_i 的表法唯一，由此得出 $e_i^2 = e_i$ 并且 $e_ie_j = 0$ 当 $j \neq i$. 由于 i 是集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 中任意元素，所以上述表明 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 A 的一组两两正交的幂等元. 因为 V_i 是子模，所以 $Ae_i \subset V_i$. 任取 $a_i \in V_i$，有 $a_i = a_i \cdot 1 = a_ie_1 + \cdots + a_ie_i + \cdots + a_ie_n$. 显然 $a_ie_j \in V_j$. 由于 a_i 的表法唯一，由上式得出 $a_i = a_ie_i \in Ae_i$. 因此 $V_i = Ae_i$.

反之，如果 $\{e_1, e_2, \cdots, e_s\}$ 是 A 的一组两两正交的幂等元，令 $e = e_1 + e_2 + \cdots + e_s$. 则 $e^2 = e$ 并且 $ee_i = e_ie = e_i (1 \leqslant i \leqslant s)$. 显然 $A(e_1 + e_2 + \cdots + e_s) \subset Ae_1 + \cdots + Ae_s$. 任取 $a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_se_s \in Ae_1 + Ae_2 + \cdots + Ae_s$. 因为 $(a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_se_s)e = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_se_s$，所以 $a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_se_s \in Ae$. 于是 $Ae = Ae_1 + Ae_2 + \cdots + Ae_s$. 设 $0 = b_1e_1 + b_2e_2 + \cdots + b_se_s$，其中 $b_i \in A (1 \leqslant i \leqslant s)$，两边用 e_j 右乘得 $0 = b_je_j$，$j = 1, 2, \cdots, s$，因此 0 的表法唯一. 从而 $Ae = Ae_1 \oplus Ae_2 \oplus \cdots \oplus Ae_s$. ▌

引理 2.2.1 说明：环 A 上左正则模 A 的直和分解相当于 A 的单位元 1 分解成两两正交的幂等元之和.

定义 4 环 A 上的左模 M 称为**可分解的**. 如果 M 能表成两

个非平凡的子模的直和；否则称为**不可分解的**.

推论 2.2.1 设 e 是环 A 的幂等元，则 e 是本原的当且仅当 Ae 是不可分解的左 A-模.

证明 设 Ae 是不可分解的左 A-模. 假如 e 不是本原的，则存在正交的幂等元 e_1,e_2，使得 $e=e_1+e_2$. 据引理 2.2.1 的第二部分得 $Ae=Ae_1\oplus Ae_2$，矛盾.

设 e 是本原幂等元. 显然 Ae 是左 A-模. 假如 Ae 可分解，设 $Ae=V_1\oplus V_2$，其中 V_1,V_2 均不等于(0). 设 $e=e_1+e_2$，其中 $e_1\in V_1$，$e_2\in V_2$. 因为 $(1-e)^2=1-e$ 并且 $(1-e)e=e(1-e)=0$，所以 $1-e$，e 是正交的幂等元. 据引理 2.2.1 的第二部分得 $A=A(1-e+e)=A(1-e)\oplus Ae=A(1-e)\oplus V_1\oplus V_2$. 因为 $1=(1-e)+e=(1-e)+e_1+e_2$，据引理 2.2.1 的第一部分得 e_1 与 e_2 是正交的幂等元，这与 e 是本原幂等元矛盾. ▌

引理 2.2.1 和推论 2.2.1 合在一起说明：环 A 上左正则模 A 分解成不可分解子模的直和相当于 A 的单位元分解成两两正交的本原幂等元之和.

类似地，环 A 分解成非零双边理想的直和也与幂等元有关系.

引理 2.2.2 如果环 A 能分解成有限多个非零双边理想 I_1，$I_2,\cdots,I_n$ 的直和，即 $A=I_1\oplus I_2\oplus\cdots\oplus I_n$. 设 $1=e_1+e_2+\cdots+e_n$，其中 $e_j\in I_j(1\leqslant j\leqslant n)$，则 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 A 的一组两两正交的中心幂等元，并且 $I_j=Ae_j$ 是具有单位元 e_j 的环，$1\leqslant j\leqslant n$. 反之，如果 $\{e_1,e_2,\cdots,e_s\}$ 是 A 的一组两两正交的中心幂等元，则

$$A(e_1+e_2+\cdots+e_s)=Ae_1\oplus Ae_2\oplus\cdots\oplus Ae_s,$$

其中 $Ae_i=e_iA$ 是 A 的双边理想，$1\leqslant i\leqslant s$.

证明 由于 I_j 是 A 的双边理想，当然也是左理想，从而 I_j 是左正则 A-模 A 的子模. 于是 $A=I_1\oplus I_2\oplus\cdots\oplus I_n$ 可看成是左正则 A-模 A 的直和分解式. 据引理 2.2.1 的第一部分得：$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 A 的一组两两正交的幂等元，并且 $I_j=Ae_j$，$1\leqslant j\leqslant n$. 任取 $a\in$

A,我们有 $a\cdot 1=1\cdot a$,从而得

$$ae_1+ae_2+\cdots+ae_n=e_1a+e_2a+\cdots+e_na.$$

因为 $ae_j\in I_j$ 并且 $e_ja\in I_j$,于是从上式得 $ae_j=e_ja$,$1\leqslant j\leqslant n$.这说明 e_j 是中心幂等元($1\leqslant j\leqslant n$).对于 Ae_j 中任一元素 xe_j,其中 $x\in A$,有 $e_j(xe_j)=(e_jx)e_j=(xe_j)e_j=xe_j^2=(xe_j)e_j$,所以 e_j 是 Ae_j 的单位元($1\leqslant j\leqslant n$).

反之,据引理 2.2.1 的第二部分得 $A(e_1+e_2+\cdots+e_s)=Ae_1\oplus Ae_2\oplus\cdots\oplus Ae_s$.因为 e_j 是中心幂等元,所以 $Ae_j=e_jA$,从而 Ae_j 是 A 的双边理想($1\leqslant j\leqslant s$). ▌

推论 2.2.2 设 e 是环 A 的中心幂等元,则 e 是中心本原的当且仅当 Ae 不能表成 A 的两个非零双边理想的直和.

证明 假如 e 不是中心本原的,则存在两个正交中心幂等元 e_1,e_2,使得 $e=e_1+e_2$.据引理 2.2.2 的第二部分得 $Ae=Ae_1\oplus Ae_2$,其中 Ae_1,Ae_2 是 A 的双边理想.

设 e 是中心本原幂等元.显然 $1-e$ 也是中心幂等元并且与 e 正交.据引理 2.2.2 的第二部分得 $A=A(1-e+e)=A(1-e)\oplus Ae$.假如 Ae 能表成 A 的两个非零双边理想 I_1 与 I_2 的直和,则 $e=e_1+e_2$,其中 $e_1\in I_1,e_2\in I_2$.于是 $A=A(1-e)\oplus I_1\oplus I_2$ 并且 $1=(1-e)+e_1+e_2$.据引理 2.2.2 的第一部分得 e_1 与 e_2 是正交的中心幂等元,这与 e 是中心本原幂等元矛盾. ▌

定义 5 环 A 的一个非零双边理想 I 称为**不可分解的**,如果 I 不能表成 A 的两个非零双边理想的直和.

引理 2.2.2 和推论 2.2.2 合在一起说明:环 A 分解成不可分解的双边理想的直和相当于 A 的单位元分解成两两正交的中心本原幂等元之和.

两个正交的幂等元一定不相等,反之不一定成立.然而两个不相等的中心本原幂等元一定是正交的,这是由于下面的引理 2.2.3.

引理 2.2.3 环 A 的两个中心本原幂等元或者相等,或者正

交.

证明 设 e_1, e_2 是环 A 的中心本原幂等元. 我们有

$$e_1 = e_1 \cdot 1 = e_1(e_2 + 1 - e_2) = e_1e_2 + e_1(1 - e_2),$$

并且

$$(e_1e_2)^2 = e_1e_2, \quad (e_1(1 - e_2))^2 = e_1(1 - e_2),$$

$$(e_1e_2)(e_1(1 - e_2)) = e_1^2e_2(1 - e_2) = e_1(e_2 - e_2^2) = 0,$$

$$(e_1(1 - e_2))(e_1e_2) = (e_1e_2)(e_1(1 - e_2)) = 0,$$

$$e_1e_2 \in Z(A), \quad e_1(1 - e_2) \in Z(A).$$

因为 e_1 是中心本原的，所以 $e_1e_2=0$ 或者 $e_1e_2=e_1$. 类似地有 $e_1e_2=0$ 或者 $e_1e_2=e_2$. 因此，或者 $e_1e_2=0$，或者 $e_1=e_1e_2=e_2$. ▌

推论 2.2.3 如果环 A 的单位元 1 能够表示成两两不等的中心本原幂等元 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 的和，则 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 A 的全部中心本原幂等元.

证明 由假设知 $1=e_1+e_2+\cdots+e_n$. 假如 A 有一个中心本原幂等元 $f \notin \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$，则据引理 2.2.3 得

$$f = fe_1 + fe_2 + \cdots + fe_n = 0,$$

矛盾. 所以 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 A 的全部中心本原幂等元. ▌

2.2 半单的有限维代数的结构及它的不可约模

我们知道，当域 K 的特征不能整除群 G 的阶时，群代数 $K[G]$ 上每一个有限维左模是完全可约的. 现在我们就来讨论具有其上的每一个左模是完全可约的性质的代数的结构以及它的不可约左模.

定义 6 域 K 上有限维代数 A 称为**半单的**，如果每一个左 A-模是完全可约的.

命题 2.2.1 设 A 是域 K 上有限维代数，则 A 是半单的充分必要条件是左正则 A-模 A 是完全可约的.

证明 必要性显然.

充分性 设左正则 A-模 A 是完全可约的. 类似于定理 1.3.1

可证完全可约模的子模是完全可约的. 因为 A 作为域 K 上向量空间是有限维的，所以左正则 A-模 A 可以分解成有限多个不可约子模的直和（证明类似于定理 1.3.2），即

$$A = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_n, \tag{2}$$

其中 $L_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 不可约. 设

$$1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n, \tag{3}$$

其中 $e_i \in L_i(1 \leqslant i \leqslant n)$. 因为不可约子模 L_i 当然是不可分解的左 A-模，于是据引理 2.2.1 和推论 2.2.1 得，$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 A 的一组两两正交的本原幂等元，并且 $L_i = Ae_i(1 \leqslant i \leqslant n)$.

任取一个左 A-模 M，要证 M 是完全可约的.

对于 $m \in M$，由(3)得

$$m = e_1 m + e_2 m + \cdots + e_n m.$$

显然 $Ae_i m$ 是 M 的子模($1 \leqslant i \leqslant n$). 因为 $e_i m \in Ae_i m$，所以

$$M = \sum_{m \in M} \sum_{i=1}^{n} Ae_i m. \tag{4}$$

考虑 Ae_i 到 $Ae_i m$ 的映射 $f: ae_i \mapsto ae_i m, \forall\, a \in A$. 显然 f 是满射. 易验证 f 是 A-同态. 因为 Ae_i 不可约，所以同态 f 的核 $\mathrm{Ker} f = (0)$ 或者 $\mathrm{Ker} f = Ae_i$. 若为前者，则 $Ae_i m$ 不可约（因为此时 f 是 A-同构）；若为后者，则 $Ae_i m = (0)$. 于是(4)式表明 M 是一族不可约子模的和.

任取 M 的一个子模 N. 考虑集合

$$S = \{M \text{ 的子模 } W \mid W \cap N = (0)\}.$$

S 对于集合的包含关系“$\subset$”成为一个偏序集. 任取 S 的一条链

$$W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_k \subset \cdots, \tag{5}$$

令 $W^* = \sum W_i$（参见本章 § 1 的定义 10），易验证 $W^* \cap N = (0)$，因此 $W^* \in S$. 显然每个 $W_i \subset W^*$，于是 W^* 是链(5)的一个上界. 据 Zorn 引理得：S 有一个极大元素，记作 N'. 我们希望证明 $N \oplus N' = M$. 为此只要证 $N + N' = M$. 假如这不成立，则存在 $m \in M$ 使得 $m \notin N + N'$. 因为 $m = e_1 m + e_2 m + \cdots + e_n m$，所以必存在某个

$e_jm \notin N+N'$. 从而 $Ae_jm \not\subset N+N'$. 因为 Ae_jm 是不可约的,所以 $(N+N')\cap Ae_jm=(0)$. 于是

$$
\begin{aligned}
(N+N')+Ae_jm &= (N+N')\oplus Ae_jm \\
&= (N\oplus N')\oplus Ae_jm = N\oplus(N'\oplus Ae_jm),
\end{aligned}
$$

从而 $(N'\oplus Ae_jm)\cap N=(0)$. 这与 N' 是 S 的极大元素矛盾. 因此 $N+N'=M$. 从而 M 是完全可约的. 这就证明了 A 是半单的. ▌

从命题 2.2.1 的证明过程中我们可得出下面的重要结果.

定理 2.2.1 设 A 是域 K 上的有限维代数. 如果 A 是半单的,则每一个不可约左 A-模同构于左正则 A-模 A 的直和分解式中的某一个不可约子模.

证明 因为 A 是半单的,所以左正则 A-模 A 是完全可约的. 又由于 A 是域 K 上有限维代数,因此左正则 A-模 A 可分解成有限多个不可约子模的直和,即

$$A = Ae_1\oplus Ae_2\oplus\cdots\oplus Ae_n,$$

并且 $1=e_1+e_2+\cdots+e_n$,其中 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 A 的两两正交的本原幂等元.

任取一个不可约左 A-模 M. 从命题 2.2.1 证明中看到 M 是形如 Ae_im 的不可约子模的和. 由于 M 本身是不可约的,因此必有 $M=Ae_im$,对某个 e_i 以及某个 m. 在命题 2.2.1 证明中已证 Ae_im 与 Ae_i 模同构,这表明 M 与 Ae_i 模同构. ▌

定理 2.2.1 告诉我们:如果 A 是半单的有限维代数,则所有不可约左 A-模都分别同构于左正则 A-模 A 的一个直和分解式中的不可约子模. 从而半单的有限维代数 A 上的每一个不可约左模都是有限维的. 下面进一步讨论左正则 A-模 A 到不可约子模的任意两种直和分解式有什么关系.

定义 7 环 R 上的左模 M 的子模降链

$$M = M_1\supset M_2\supset\cdots\supset M_k\supset M_{k+1} = (0)$$

称为 M 的一个**合成列**,如果所有的商模 M_i/M_{i+1} 是不可约的. 这些商模 M_i/M_{i+1} 称为**合成因子**. 两个合成列称为**等价**,如果它们的

因子数目相同并且这两个合成列的因子能用某种方式配对使得对应的因子是模同构. 因子的数目 k 称为合成列的**长度**.

定理 2.2.2(Jordan-Hölder) 如果环 R 上的左模 M 有合成列,则 M 的任意两个合成列是等价的.

定理 2.2.2 的证明可以在 C. W. Curtis 和 I. Reiner 著的书(见参考文献[1])中第 79 页找到.

推论 2.2.4 如果 A 是域 K 上的有限维半单代数,那么左正则 A-模 A 到不可约子模的任意两种直和分解式中不可约子模的数目相同,并且这两种直和分解式中的不可约子模能用某种方式配对使得对应的不可约子模是同构的.

证明 因为 A 是有限维半单代数,所以

$$A = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_n, \tag{6}$$

其中 L_i 不可约($i=1,2,\cdots,n$). 考虑左正则 A-模 A 的子模的降链

$$A = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_n \supset L_2 \oplus \cdots \oplus L_n \supset \cdots \supset L_n \supset (0). \tag{7}$$

因为

$$A/(L_2 \oplus \cdots \oplus L_n) \cong L_1,$$

$$L_2 \oplus \cdots \oplus L_n/(L_3 \oplus \cdots \oplus L_n) \cong L_2, \cdots, L_n/(0) \cong L_n,$$

所以每一个商模是不可约的,从而(7)是 A 的一个合成列. 据 Jordan-Hölder 定理,A 的任意两个合成列等价,从而推论 2.2.4 得证. ▌

推论 2.2.4 说明:左正则 A-模 A 的直和分解式(6)中;任取一个不可约子模 L_i,分解式(6)中出现的与 L_i 同构的不可约子模的数目是由 A 唯一决定的,与分解式无关,这个数目称为 **L_i 在 A 中的重数**.

推论 2.2.4 还说明:左正则 A-模 A 的直和分解式(6)中不同构的不可约子模的数目是由 A 唯一决定的,与分解式无关. 这个数目也就是所有不同构的不可约左 A-模的数目(据定理 2.2.1).

那么左正则 A-模 A 的直和分解式中不同构的不可约子模的

数目等于多少呢？A 的直和分解式中不可约子模 L_i 在 A 中的重数是多少呢？ L_i 作为域 K 上的向量空间其维数是多少呢？

我们知道：左正则 A-模 A 的子模就是环 A 的左理想. 不可约子模是具有什么性质的左理想？

定义 8 环 A 的一个非零左理想 L 称为**极小左理想**，如果 L 只包含 A 的两个左理想：(0)和 L.

于是左正则 A-模 A 的不可约子模就是环 A 的极小左理想. 因此左正则 A-模 A 到不可约子模的直和分解式可以看成是环 A 到极小左理想的直和分解式.

定义 9 环 A 的两个左理想 L 和 L' 称为是**同构**的，如果存在 L 到 L' 的双射 f 使得对于任意 $x,y\in L, r\in A$ 都有

$$f(x+y)=f(x)+f(y),$$

$$f(rx)=rf(x).$$

由定义 9 看出，A 的两个左理想 L 和 L' 同构也就是把它们看成左正则 A-模的子模后，它们是模同构（或者说 A-同构）.

于是推论 2.2.4 可以叙述成：如果 A 是域 K 上的有限维半单代数，那么环 A 到极小左理想的任意两种直和分解式中极小左理想的数目相同，并且这两种直和分解式中的极小左理想能用某种方式配对使得对应的极小左理想同构. 从而环 A 到极小左理想的直和分解式中，与一个极小左理想 L_i 同构的极小左理想的数目由 A 唯一决定，这个数目称为 L_i 在 A 中的重数；直和分解式中不同构的极小左理想的数目由 A 唯一决定，与分解式无关. 据定理 2.2.1，环 A 的每一个极小左理想同构于 A 的直和分解式中的某一个极小左理想. 因此环 A 的所有不同构的极小左理想的数目等于 A 的一个直和分解式中不同构的极小左理想的数目.

前面提出的三个问题也就是：若 A 是域 K 上的有限维半单代数，环 A 的直和分解式中有多少个不同构的极小左理想？一个极小左理想 L_i 在 A 中的重数是多少？ L_i 作为域 K 上的向量空间其维数是多少？

我们首先对半单的有限维代数 A 的左理想和极小左理想作一些调查.

引理 2.2.4 设 A 是域 K 上半单的有限维代数,则 A 的每一个非零左理想由一个幂等元生成.

证明 设 L 是 A 的一个非零左理想,于是 L 是左正则 A-模 A 的非零子模. 因为 A 是半单的,所以左正则 A-模 A 是完全可约的,从而存在子模 L' 使得 $A=L\oplus L'$. 设 $1=e+e'$,其中 $e\in L$,$e'\in L'$. 据引理 2.2.1 得: e 是幂等元并且 $L=Ae$,即 L 由幂等元 e 生成. ▍

引理 2.2.5 设 A 是域 K 上半单的有限维代数,L 和 L' 是 A 的两个极小左理想,则

(i) $L'\cong L$ 的充分必要条件是 $L'=La'$ 对于某个 $a'\in L'$;

(ii) $L'\cong L$ 的充分必要条件是 $LL'=L'$;

(iii) $L'\ncong L$ 的充分必要条件是 $LL'=(0)$.

证明 (i) *充分性* 考虑 L 到 $L'=La'$ 的映射 $f: x\mapsto xa'$,$\forall x\in L$. 显然 f 是满射并且保持加法. 对于 $r\in A$,有 $f(rx)=(rx)a'=r(xa')=rf(x)$,因此 f 是满的 A-同态. 于是 $\mathrm{Ker}f$ 是含于 L 的 A 的左理想. 从而 $\mathrm{Ker}f=(0)$ 或 $\mathrm{Ker}f=L$. 若为后者,则 $L'=(0)$,这不可能. 因此 $\mathrm{Ker}f=(0)$,从而 f 是 A-同构.

必要性 设 L 由幂等元 e 生成,设 L 到 L' 的同构映射 是 φ,则对一切 $x\in A$ 有 $\varphi(xe)=x\varphi(e)$. 当 $x\in L$ 时,可设 $x=ae$ 对于某一个 $a\in A$,于是 $xe=(ae)e=ae^2=ae=x$. 从而 $\varphi(x)=x\varphi(e)$,$\forall x\in L$. 记 $a'=\varphi(e)$,则 $\varphi(x)=xa'$. 由于 φ 是满射,于是得到 $L'=La'$.

(ii) *充分性* 设 $LL'=L'$. 任取 $a'\in L'$,显然 La' 是 A 的左理想并且 $La'\subset L'$. 由于 L' 是 A 的极小左理想,所以 $La'=(0)$ 或者 $La'=L'$. 因为 $LL'=L'$,所以存在 $a'\in L'$ 使得 $La'\neq(0)$,从而 $La'=L'$. 据(i)得 $L'\cong L$.

必要性 设 $L'\cong L$. 据(i)得 $L'=La'\subset LL'$. 又由于 L' 是 A 的

左理想，所以 $LL'\subset L'$. 因此 $LL'=L'$.

(iii) 充分性显然.

必要性 据(ii)的充分性的证明知道：任取 $a'\in L'$ 有 $La'=(0)$ 或者 $La'=L'$. 然后据(i)得 $La'=(0),\forall a'\in L'$. 所以 $LL'=(0)$. ▎

定义 10 环 R 称为**单环**，如果 R 只有平凡的双边理想.

定义 11 域 K 上的代数 B 称为**单代数**如果环 B 是单环.

定义 12 环 A 的非零双边理想 I 称为**极小双边理想**，如果 I 只包含 A 的两个双边理想：(0)和 I.

定理 2.2.3 设 A 是域 K 上的有限维半单代数，环 A 到极小左理想的一个直和分解式为

$$A=L_{11}\oplus\cdots\oplus L_{1m_1}\oplus\cdots\oplus L_{s1}\oplus\cdots\oplus L_{sm_s},\qquad (8)$$

其中 $L_{ij}\cong L_{kl}$ 当且仅当 $i=k$.

令

$$A_i=L_{i1}\oplus L_{i2}\oplus\cdots\oplus L_{im_i},\quad i=1,2,\cdots,s.$$

则

(i) $A=A_1\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_s$;

(ii) 每一个 A_i 是 A 的极小双边理想，并且 A_i 是单环；

(iii) A 的不同构的极小左理想的数目等于 A 的中心本原幂等元的数目.

证明 (i) 据命题 2.1.4 立即得到.

(ii) 显然 A_i 是 A 的左理想. 设 $k\neq i$，据引理 2.2.5 得，$L_{ij}L_{kl}=(0)$，从而 $A_iL_{kl}=L_{i1}L_{kl}+L_{i2}L_{kl}+\cdots+L_{im_i}L_{kl}=(0)$，由此得出 $A_iA_k=(0)$. 任取 $a_i\in A_i$，$x\in A$. 设 $x=x_1+x_2+\cdots+x_s$，其中 $x_i\in A_i$，则 $a_ix=a_ix_1+a_ix_2+\cdots+a_ix_s=a_ix_i\in A_i$. 因此 A_i 是 A 的右理想. 这就证明了 $A_i(i=1,2,\cdots,s)$是 A 的双边理想.

设 I 是含于 A_i 的 A 的非零双边理想. 因为 I 是左理想，所以 I 包含 A 的一个极小左理想 L. 我们已指出：A 的每一个极小左理

想同构于 A 的直和分解式中出现的某一个极小左理想，因此 L 同构于某个 L_{kt}. 假如 $k\neq i$，由引理 2.2.5 得，$L_{kt}L=L$；因为 $L\subset I\subset A_i$，所以 $L_{kt}L\subset A_kA_i=(0)$；于是得出 $L=(0)$，矛盾. 从而 $L\cong L_{it}(1\leqslant t\leqslant m_i)$. 据引理 2.2.5 的(i)得，$L_{it}=Ia_t$ 对于某一个 $a_t\in L_{it}, t=1,2,\cdots,m_i$. 因为 I 是右理想，所以 $La_t\subset I$. 由此得出 $I\supset L_{i1}+L_{i2}+\cdots+L_{im_i}=A_i$，从而 $I=A_i$. 这证明了 A_i 是 A 的极小双边理想.

任取 A_i 的一个双边理想 J. 任取 $x\in A$，设 $x=x_1+x_2+\cdots+x_s$，其中 $x_l\in A_l$. 对于任意 $b\in J$，我们有 $xb=x_1b+x_2b+\cdots+x_sb=x_ib\in J$；类似地有 $bx\in J$. 因此 J 也是 A 的双边理想. 由于 A_i 是 A 的极小双边理想，所以 $J=(0)$ 或者 $J=A_i$. 这说明 A_i 是单环(关于 A_i 含有单位元这一点在下面将说明).

(iii) 从(i)和(ii)知道，环 A 分解成了极小双边理想 $A_1,A_2,\cdots,A_s$ 的直和. 设 $1=e_1+e_2+\cdots+e_s$，其中 $e_i\in A_i(1\leqslant i\leqslant s)$. 据引理 2.2.2 和推论 2.2.2 得，$\{e_1,e_2,\cdots,e_s\}$是 A 的两两不等的中心本原幂等元，并且 $A_i=Ae_i$ 是具有单位元 e_i 的环. 又据推论 2.2.3 知道，$\{e_1,e_2,\cdots,e_s\}$是 A 的全部中心本原幂等元. 因此 A 的不同构的极小左理想的数目 s 等于 A 的中心本原幂等元的数目. ▌

从定理 2.2.3 知道，若 A 是域 K 上的有限维半单代数，则不同构的不可约左 A-模的数目等于 A 的中心本原幂等元的数目.

定义 13 设 A 是域 K 上有限维半单代数，定理 2.2.3 中的 $A_i(1\leqslant i\leqslant s)$称为 A 的**单成分**.

从定理 2.2.3 知道，域 K 上有限维半单代数 A 的单成分的数目等于 A 的不同构的极小左理想的数目，也等于 A 的中心本原幂等元的数目.

现在我们来研究域 K 上有限维半单代数 A 的直和分解式(8)中极小左理想 L_{i1}在 A 中的重数. 因为 A 的单成分 $A_i=L_{i1}\oplus\cdots\oplus L_{im_i}$，所以 $L_{i1}\subset A_i$. 显然 L_{i1}也是 A_i 的左理想；进一步可说明 L_{i1}也是 A_i 的极小左理想，这是因为假如 $J\neq(0)$并且 J 是含于 L_{i1}的 A_i

的左理想，据定理 2.2.3(ii)的证明中最后一段知：J 也是 A 的左理想，从而 $J=L_{i1}$. 因此 L_{i1}在 A 中的重数 m_i 等于 A_i 到它的极小左理想的直和分解式中极小左理想的数目. 为了求出后者就需要讨论单代数 A_i 到极小左理想的直和分解，方法是：在单代数 A_i 所属的同构类里找一个具体的代表，然后对这个代表讨论其到极小左理想的直和分解. 下一小节我们来研究单代数的结构.

2.3 有限维单代数的结构

设 V,W 是环 R 上的左模，V 到 W 的所有模同态(或说 R-同态)的集合记作 $\mathrm{Hom}_R(V,W)$. 对于 $f,g\in\mathrm{Hom}_R(V,W)$，规定 $f+g$: $v\mapsto f(v)+g(v)$, $\forall\ v\in V$. 则 $\mathrm{Hom}_R(V,W)$是 abel 加群.

引理 2.2.6(Schur) 设 V,W 是环 R 上的不可约左模，则

(i) 当 $V\not\cong W$ 时，$\mathrm{Hom}_R(V,W)=(0)$；

(ii) $\mathrm{Hom}_R(V,V)$是除环.

证明 (i)设 $f\in\mathrm{Hom}_R(V,W)$. 因为 $\mathrm{Ker}f$ 是 V 的子模，而 V 不可约，所以 $\mathrm{Ker}f=(0)$或 $\mathrm{Ker}f=V$. 若为后者，则 $f=0$. 若为前者，则 f 是单射；并且由于 $\mathrm{Im}f$ 是 W 的子模，而 W 不可约，所以 $\mathrm{Im}f=W$(假如 $\mathrm{Im}f=(0)$，则 $V=(0)$，矛盾)，于是 f 是满射，从而 f 是模同构. 所以当 $V\not\cong W$ 时，$\mathrm{Hom}_R(V,W)=(0)$.

(ii) 易验证 abel 加群 $\mathrm{Hom}_R(V,V)$对于映射的乘法成为环. 任取 $\mathrm{Hom}_R(V,V)$的一个非零元 f，由于 V 不可约，必有 $\mathrm{Ker}f=(0)$，从而 $\mathrm{Im}f=V$，因此 f 是双射. 从而 $\mathrm{Hom}_R(V,V)$是除环. ▌

定理 2.2.4(Wedderburn) 设 B 是域 K 上有限维单代数，设 I 是 B 的极小左理想，令 $D=\mathrm{Hom}_B(I,I)$，则

(i) I 是除环 D 上的有限维右向量空间，并且有

$$\dim_K I = (\dim_K D)(\dim_D I); \tag{9}$$

(ii) $B\cong\mathrm{Hom}_D(I,I)\cong M_n(D)$ ，

其中 $n=\dim_D I$，并且上述同构是代数同构.

证明 (i) 因为 I 是环 B 的极小左理想，所以 I 是不可约左

B-模. 由引理 2.2.6 知 $D=\mathrm{Hom}_B(I,I)$是除环. 任取 $d\in D, x\in I$, 把 x 在映射 d 下的像写成 xd, 在这样的记号下有 $x(d_1d_2)=(xd_1)d_2$, 其中 $d_1,d_2\in D$. 容易验证 I 成为右 D-模. 因此 I 是除环 D 上的右向量空间.

因为 I 是域 K 上代数 B 的左模, 所以 I 可成为域 K 上的向量空间. 由于 B 是有限维的, 并且 $I\subset B$, 因此 I 作为域 K 上向量空间是有限维的.

对于 $x\in I$, 规定 $(k1)_R$: $x\mapsto x(k1)$. 易看出 $x(k1)\in I$, 因此 $(k1)_R$ 是 I 到 I 的映射. 显然它保持加法, 并且对于任意 $b\in B$ 有 $(k1)_R(bx)=(bx)(k1)=b(x(k1))=b((k1)_Rx)$, 因此

$$(k1)_R\in \mathrm{Hom}_B(I,I)=D.$$

I 中取一个 K-基: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$. 任取 $x\in I$, 有

$$x=\sum_{i=1}^m k_i\alpha_i=\sum_{i=1}^m (k_i1)\alpha_i=\sum_{i=1}^m \alpha_i(k_i1)=\sum_{i=1}^m \alpha_i(k_i1)_R,$$

这说明 x 表成了 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的 D-线性组合, 从而 I 作为 D 上右向量空间有一组生成元: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$. 因此 $\dim_D I<\infty$.

进一步可证明

$$\dim_K I=(\dim_K D)(\dim_D I),$$

这是因为我们可规定 $kd:=(k1)_Rd$, 从而 D 可成为域 K 上向量空间. 由于 $d(kx)=d[(k1)x]=(k1)(d(x))=k(d(x))$, 所以 d 是域 K 上向量空间 I 的线性变换, 从而 $D\subset \mathrm{Hom}_K(I,I)$. 于是 $\dim_K D\leqslant(\dim_K I)^2$, 即 $\dim_K D<\infty$. 在 D 中取一个 K-基, 在 I 中取一个 D-基, 经过计算可证明(9)式成立, 其具体细节留给读者.

(ii) I 作为加法群, 它的自同态环记作 $\mathrm{End}(I,+)$. 因为 I 是 B 的左理想, 所以对于每一个 $b\in B$, 映射 b_L: $x\mapsto bx, \forall\ x\in I$, 是加法群 I 的一个自同态. 令

$$B_L=\{b_L\mid b\in B\},$$

易看出 B_L 是 $\mathrm{End}(I,+)$的一个子环, 并且易验证映射 f: $b\mapsto b_L$ 是 B 到 B_L 上的环同态, 它的核是 B 的双边理想. 因为 B 是单环并

且 $B_L\neq 0$，所以 f 的核是(0)，从而 $B\cong B_L$. 规定域 K 与 B_L 的数量乘法为：$kb_L := (k1)_L b_L$，易验证 B_L 成为域 K 上的向量空间，并且易看出 B_L 是域 K 上的代数. 不难看出映射 f 保持数量乘法，因此 $B\cong B_L$ 是代数同构.

任取 $x\in I, d\in D$，因为 $D=\mathrm{Hom}_B(I,I)$，所以对于任意 $b\in B$ 有 $d(bx)=b(d(x))$，从而得到 $b_L(xd)=b_L(d(x))=b(d(x))=d(bx)=d(b_Lx)=(b_Lx)d$，这说明 $b_L\in \mathrm{Hom}_D(I,I)$. 因此 $B_L\subset \mathrm{Hom}_D(I,I)$.

现在来证 $B_L=\mathrm{Hom}_D(I,I)$. 易看出 $\mathrm{Hom}_D(I,I)$ 是 $\mathrm{End}(I,+)$ 的子环. 如果我们能证明 B_L 是 $\mathrm{Hom}_D(I,I)$ 的左理想，那么由于 1_L 是 $\mathrm{Hom}_D(I,I)$ 的单位元并且 $1_L\in B_L$，于是就得到 $B_L=\mathrm{Hom}_D(I,I)$.

因为 I 是 B 的左理想，所以 IB 是 B 的左理想，又显然是 B 的右理想，从而是 B 的双边理想. 因为 B 是单环，且 $IB\neq 0$，所以 $IB=B$. 于是为了证明 $f(B)$（它等于 B_L）是 $\mathrm{Hom}_D(I,I)$ 的左理想，就只要对于任意 $T\in \mathrm{Hom}_D(I,I), y\in I, b\in B$，证明：$T[(yb)_L]\in f(IB)=f(B)$.

任意取定 $x\in I$，设 $x_R: y\mapsto yx, \forall\ y\in I$，显然 x_R 保持加法，并且对于任意 $b\in B, y\in I$，有

$$x_R(by) = (by)x = b(yx) = b[x_R(y)],$$

所以 $x_R\in \mathrm{Hom}_B(I,I)=D$. 于是$\forall\ x,y\in I$，有

$$T(yx) = T[x_R(y)] = x_R(Ty) = (Ty)x. \qquad (10)$$

从而$\forall\ x\in I$，有

$$\begin{aligned}T[(yb)_L]x &= T[(yb)x] = T[y(bx)] \xlongequal{(10)} (Ty)(bx)\\ &= [(Ty)b]x = [(Ty)b]_L x,\end{aligned}$$

因此 $T[(yb)_L]=[(Ty)b]_L$. 由于 $Ty\in I$，所以 $[(Ty)b]_L\in f(IB)$，从而 $T[(yb)_L]\in f(B)=B_L$. 因此 B_L 是 $\mathrm{Hom}_D(I,I)$ 的左理想. 这就证明了 $B_L=\mathrm{Hom}_D(I,I)$，从而 $B\cong \mathrm{Hom}_D(I,I)$.

(i) 中已证 I 是 D 上有限维右向量空间，设 $n=\dim_D I$. 与线性

代数课程中讲的线性变换与矩阵的关系类似，可证得 $\mathrm{Hom}_D(I,I)\cong M_n(D)$，其中 $M_n(D)$是除环 D 上所有 n 级矩阵组成的集合，它也是域 K 上的代数. ▌

定理 2.2.4 说明：域 K 上有限维单代数 B 同构于一个除环 D 上的 n 级矩阵组成的代数 $M_n(D)$，其中 $D=\mathrm{Hom}_B(I,I)$，I 是 B 的一个极小左理想，n 是 I 作为 D 上右向量空间的维数. 因此为了研究单代数 B 到它的极小左理想的直和分解，就只要去研究矩阵代数 $M_n(D)$到它的极小左理想的直和分解.

定理 2.2.5 设 D 是除环，用 $M_n(D)$表示 D 上所有 n 级矩阵组成的集合，则 $M_n(D)$是单环；并且有

$$M_n(D)=M_n(D)e_{11}\oplus M_n(D)e_{22}\oplus\cdots\oplus M_n(D)e_{nn},$$

其中 e_{ij}表示(i,j)元为 1 而其余元全为 0 的 n 级矩阵；每一个 $M_n(D)e_{ii}$是 $M_n(D)$的极小左理想，它们彼此同构；从而 $M_n(D)$的直和分解式中出现的极小左理想的数目等于矩阵的级数 n.

证明 抽象代数课程中已证明域 F 上 n 级全矩阵环 $M_n(F)$是单环，类似可证除环 D 上 n 级全矩阵环 $M_n(D)$是单环.

任取 $T\in M_n(D)$，显然有 $T=Te_{11}+Te_{22}+\cdots+Te_{nn}$. 因为 $M_n(D)e_{ii}$里的矩阵其非 0 元仅出现在第 i 列，所以

$$M_n(D)e_{ii}\cap\Big(\sum_{j\neq i}M_n(D)e_{jj}\Big)=0,$$

从而 $M_n(D)=M_n(D)e_{11}\oplus M_n(D)e_{22}\oplus\cdots\oplus M_n(D)e_{nn}$. 每个 $M_n(D)e_{ii}$是 $M_n(D)$的左理想，下面来证它是极小左理想.

设 J 是含于 $M_n(D)e_{ii}$里的 $M_n(D)$的非 0 左理想，要证明 $J\supset M_n(D)e_{ii}$. 为此任取 $H\in M_n(D)e_{ii}$，对于取定的 $C\in J$，要证 $H=XC$ 对某个 $X\in M_n(D)$. 设 $C=c_{1i}e_{1i}+c_{2i}e_{2i}+\cdots+c_{ni}e_{ni}\neq 0$，$H=h_{1i}e_{1i}+h_{2i}e_{2i}+\cdots+h_{ni}e_{ni}$，矩阵方程 $H=XC$ 显然有解，因此 $H\in J$，从而 $J=M_n(D)e_{ii}$. 这就证明了 $M_n(D)e_{ii}$是极小左理想.

设 $i\neq j$，来证 $M_n(D)e_{ii}\cong M_n(D)e_{jj}$. 取 $S=e_{ij}e_{jj}\in M_n(D)e_{jj}$，因为 $e_{ii}S=e_{ii}(e_{ij}e_{jj})=e_{ii}e_{ij}=e_{ij}\neq 0$，所以 $M_n(D)e_{ii}S\neq(0)$. 由于

$M_n(D)e_{ii}S$ 是 $M_n(D)$的左理想，并且它含于 $M_n(D)e_{jj}$，于是从 $M_n(D)e_{jj}$是极小左理想推出 $M_n(D)e_{ii}S=M_n(D)e_{jj}$. 与引理 2.2.5 的(i)的充分性的证明一样，得到 $M_n(D)e_{jj}\cong M_n(D)e_{ii}$. ▌

推论 2.2.5 设 A 是域 K 上的有限维半单代数，记号同定理 2.2.3，设 $D_i=\mathrm{Hom}_{A_i}(L_{i1},L_{i1})$，则 $A_i\cong\mathrm{Hom}_{D_i}(L_{i1},L_{i1})\cong M_{n_i}(D_i)$，其中 $n_i=\dim_{D_i}(L_{i1})$，并且 L_{i1} 在 A 中的重数 m_i 等于 n_i $(i=1,2,\cdots,s)$.

证明 从定理 2.2.3，定理 2.2.4 和定理 2.2.5 立即得到. ▌

推论 2.2.5 回答了极小左理想 L_{i1}在 A 中的重数问题.

2.4 代数闭域上有限维半单代数的不可约模的维数

引理 2.2.7(Schur 引理) 设 A 是代数闭域 K 上的代数，设 V 是不可约左 A-模，并且 V 作为域 K 上的向量空间是有限维的，则 $\mathrm{Hom}_A(V,V)=K\cdot 1_V\cong K$.

证明 设 $D=\mathrm{Hom}_A(V,V)$，由引理 2.2.6 知 D 是除环. 从定理 2.2.4 的(i)的证明过程中看到：D 是域 K 上的向量空间，并且 $D\subset\mathrm{Hom}_K(V,V)$. 由于 V 是 K 上有限维向量空间，所以 $\dim_K D\leqslant(\dim_K V)^2$.

既然 D 是域 K 上有限维向量空间，因此，任取 $d\in D$，必存在一个正整数 r 使得

$$d^r=k_0 1_V+k_1 d+\cdots+k_{r-1}d^{r-1},$$

也就是存在一个非零的首一多项式 $f(x)\in K[x]$使得 $f(d)=0$. 因为 K 是代数封闭域，所以存在 $b_1,b_2,\cdots,b_r\in K$ 使得

$$f(x)=(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_r).$$

用 d 代入得 $0=f(d)=(d-b_1 1_V)(d-b_2 1_V)\cdots(d-b_r 1_V)$. 因为 D 是除环，它没有零因子，所以由上式得：必有某个 $d-b_i 1_V=0$，从而 $d=b_i 1_V$. 因此 $D\subset K\cdot 1_V$. 又显然有 $K\cdot 1_V\subset D$，因此 $D=K\cdot 1_V\cong K$，这里的同构是环同构，也是代数同构. ▌

Schur 引理说明：在引理的条件下，$D=\mathrm{Hom}_A(V,V)$是 V 的

数乘变换的全体，因而它与域 K 同构，于是 D 成为域.

在第四章§4中将看到：Schur 引理中条件"K 是代数封闭域"可以换成"K 是代数 A 的分裂域并且 A 是有限维的"，结论仍然成立.

推论 2.2.6 设 A 是代数闭域 K 上有限维半单代数，记号同推论 2.2.5，则 $D_i \cong K$，从而 $A_i \cong M_{n_i}(K)$，其中 $n_i = \dim_K(L_{i1})$；并且 L_{i1} 在 A 中的重数 m_i 等于 $\dim_K(L_{i1})$，$i=1,2,\cdots,s$.

证明 由推论 2.2.5 和引理 2.2.7 立即得到. ▌

从推论 2.2.6 知道：若 A 是代数闭域 K 上的有限维半单代数，则任一不可约左 A-模 M 作为域 K 上向量空间的维数等于 A 的直和分解式中出现的某个极小左理想 L_{i1}（它与 M 同构）在 A 中的重数. 这就回答了§2.2中提出的第三个问题. 进一步问：维数满足什么样的关系式？

定理 2.2.6 条件同推论 2.2.6. 则

$$\dim_K A = \sum_{i=1}^{s} (\dim_K(L_{i1}))^2. \tag{11}$$

证明 由定理 2.2.3 知道

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_s,$$

于是 $\dim_K A = \sum_{i=1}^{s} \dim A_i$. 由推论 2.2.6 知道：$A_i \cong M_{n_i}(K)$，其中 $n_i = \dim_K(L_{i1})$，所以 $\dim_K A_i = n_i^2 = (\dim_K(L_{i1}))^2$. ▌

关系式(11)给出了不可约左 A-模的维数的一个重要限制，即，代数闭域 K 上的有限维半单代数 A 的所有不同构的不可约左 A-模的维数的平方和正好等于 A 的维数.

由于 Schur 引理的条件可以减弱，因此推论 2.2.6 和定理 2.2.6 的条件"K 是代数闭域"可减弱成"K 是代数 A 的分裂域"，结论仍然成立.

注 定理 2.2.4 的证明中我们指出了 $B_L \subset \mathrm{Hom}_D(I,I)$，并且证明了 $B_L = \mathrm{Hom}_D(I,I)$. 一般情形，设 R 是一个环，M 是左 R-模，

令 $R_L := \{r_L \mid r \in R\}$，其中 $r_L: x \mapsto rx, \forall\, x \in M$，则 R_L 是 $\mathrm{End}(M, +)$的子环. 设 $D = \mathrm{Hom}_R(M, M)$，对于 $d \in D, x \in M$，把 x 在 d 下的像写成 xd，则 M 成为右 D-模. 易证 $R_L \subset \mathrm{Hom}_D(M, M)$. 如果 $R_L = \mathrm{Hom}_D(M, M)$，那么称$(R, M)$具有**双中心化性质**.

习　题　2.2

1. 设 A 是一个环，如果 M 是 A 上的完全可约左模，则 M 的每一个子模和每一个同态象是完全可约的.

2. 如果 M 是环 A 上的完全可约左模并且 $M \neq (0)$，则 M 包含一个不可约子模.

(**提示**：取 M 中一个非零元 m. 据 Zorn 引理，存在 M 的一个子模 N，其具有性质：$m \notin N$ 的最大子模. 设 $M = N \oplus N'$. 如果 N' 是可约的，则由于 N' 是完全可约模 M 的子模，从而存在 M 的非零子模 N_1, N_2 使得 $N' = N_1 \oplus N_2$. 注意$(N \oplus N_1) \cap (N \oplus N_2) = N$，由此可得出矛盾.)

3. 证明下列命题等价，其中 M 是环 A 上的左模.

(i) M 是完全可约的；

(ii) M 是不可约子模的直和；

(iii) M 是不可约子模的和.

(**提示**：(i)⇒(ii). 考虑由 M 的不可约子模的集合组成的族，其中每个集合里的不可约子模的和是直和. 据 Zorn 引理，这个族有极大元素 $\{N_i\}$. 设 $N = \bigoplus_i N_i$，并且设 $M = N \oplus N'$. 如果 $N' \neq (0)$，则 N' 包含一个不可约子模 L，由此去推出矛盾.)

4. 设 M 是环 A 上的左模. 称 **M 满足升链条件**(简记作 **M 满足 A. C. C.**)，如果它的每一条子模的升链仅包含有限多个不同的子模；称 **M 满足降链条件**(简记作 **M 满足 D. C. C.**)，如果它的每一条子模的降链仅包含有限多个不同的子模. 环 A 称为**左 Noether 环**，如果左正则 A-模 A 满足 A. C. C. 环 A 称为**左 Artin 环**，如果左正则 A-模 A 满足 D. C. C.

设 M 是完全可约的左 A-模，证明：M 满足 A.C.C. 当且仅当 M 满足 D.C.C..

5. 设环 A 上的左模 M 满足 A.C.C. 或者 D.C.C.，则 M 是完全可约的当且仅当 M 是有限多个不可约子模的直和.

6. 证明：对于任意除环 D 和任一正整数 n，都有 D 上的 n 级全矩阵环 $M_n(D)$是单环.

7. 设(φ,V)和(ψ,W)是群 G 的两个不可约 K-表示，其中 K 是代数封闭域. 设 σ 是域 K 上有限维向量空间 V 到 W 的线性映射并且满足 $\psi(g)\sigma=\sigma\varphi(g)$，$\forall\ g\in G$. 证明：

(i) 若 φ 和 ψ 不等价，则 $\sigma=0$；

(ii) 若 $V=W$ 并且 $\varphi=\psi$，则 $\sigma=k\cdot 1_V$，对某个 $k\in K$.

8. 设(φ,V)和(ψ,W)是有限群 G 的两个不可约复表示，设 σ 是有限维复向量空间 V 到 W 的任一线性映射，令 $\tilde{\sigma}=|G|^{-1}\sum\limits_{g\in G}\psi(g)\sigma\varphi(g)^{-1}$. 证明：

(i) 若 φ 与 ψ 不等价，则 $\tilde{\sigma}=0$；

(ii) 若 $V=W$ 并且 $\varphi=\psi$，则 $\tilde{\sigma}=k\cdot 1_V$，其中 $k=\dfrac{\mathrm{tr}\sigma}{\dim V}$，这里 $\mathrm{tr}\sigma$ 表示线性变换 σ 的迹.

9. 设 Φ 和 Ψ 是群 G 在域 K 上的两个不可约矩阵表示，次数分别为 m 和 n. 设 A 是域 K 上的 $m\times n$ 矩阵使得 $\Phi(g)A=A\Psi(g)$，$\forall\ g\in G$. 则或者(i) $A=0$，或者(ii) $m=n$ 并且 A 是可逆矩阵.

10. 设 Φ 是群 G 在代数闭域 K 上的 m 次不可约矩阵表示，设 A 是域 K 上 m 级矩阵使得 $\Phi(g)A=A\Phi(g)$，$\forall\ g\in G$. 则 A 是数量矩阵.

§3 有限群的不可约表示(半单的情形)

本节讨论有限群 G 在特征不能整除 $|G|$ 的域 K 上的不可约

表示. 据 Maschke 定理,G 的正则表示是完全可约的. 从而群代数 $K[G]$的左正则模是完全可约的. 据命题 2.2.1 得,群代数 $K[G]$ 是半单的,并且其维数等于$|G|$. 因此 § 2 的结果可以应用到$K[G]$上.

把定理 2.2.1 应用到群代数 $K[G]$上立即得到:

定理 2.3.1 设 G 是有限群,设域 K 的特征不能整除$|G|$,则 G 的每一个不可约 K-表示等价于 G 的正则 K-表示的直和分解式中的某一个不可约表示. ▌

把定理 2.2.3 应用到群代数 $K[G]$上立即得到:

定理 2.3.2 有限群 G 在特征不能整除$|G|$的域 K 上的所有不等价的不可约 K-表示的数目等于群代数 $K[G]$的中心本原幂等元的数目. ▌

据推论 2.2.4 得到:设 G 是有限群,K 是特征不能整除$|G|$的域,设 φ_i 是 G 的正则 K-表示 ρ 的直和分解式中出现的一个不可约表示,则在这个直和分解式中出现的与 φ_i 等价的不可约表示的数目由 ρ 唯一决定,与分解式无关,这个数目称为 φ_i 在 ρ 中的**重数**.

设 G 是有限群,K 是特征不能整除$|G|$的域. 设 $K[G]$到它的极小左理想的一个直和分解式为

$$K[G] = L_{11} \oplus \cdots \oplus L_{1m_1} \oplus \cdots \oplus L_{s1} \oplus \cdots \oplus L_{sm_s}, \qquad (1)$$

其中 $L_{ij} \cong L_{kl}$当且仅当 $i=k$. 令

$$A_i = L_{i1} \oplus L_{i2} \oplus \cdots \oplus L_{im_i}, \quad i = 1,2,\cdots,s. \qquad (2)$$

据定理 2.2.3 得

$$K[G] = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_s, \qquad (3)$$

其中每一个 A_i 是 $K[G]$的极小双边理想,并且 A_i 是单环. 设

$$1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_s, \qquad (4)$$

其中 $e_i \in A_i (1 \leqslant i \leqslant s)$,则$\{e_1, e_2, \cdots, e_s\}$是 $K[G]$的全部中心本原幂等元,并且 $A_i = K[G]e_i, i=1,2,\cdots,s$. 设

$$D_i = \mathrm{Hom}_{A_i}(L_{i1}, L_{i1}),\tag{5}$$

据推论 2. 2. 5 得

$$A_i \cong \mathrm{Hom}_{D_i}(L_{i1}, L_{i1}) \cong M_{n_i}(D_i),\tag{6}$$

其中 $n_i=\dim_{D_i}(L_{i1})$，并且 L_{i1}在 $K[G]$中的重数 m_i 等于 n_i. 于是由 L_{i1}提供的 G 的不可约表示在 G 的正则表示 ρ 中的重数等于 $\dim_{D_i}(L_{i1})$.

由定理 2. 2. 6 立即得到

定理 2. 3. 3 设 G 是有限群，K 是特征不能整除 $|G|$的代数闭域. 设 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_s$ 是 G 的所有不等价的不可约 K-表示，并且设 φ_i 的次数为 $n_i(i=1,2,\cdots,s)$，则

$$|G| = \sum_{i=1}^{s} n_i^2. \quad \blacksquare \tag{7}$$

(7)式给出了有限群 G 在特征不能整除$|G|$的代数闭域上的不可约表示的次数的一个重要限制：G 的所有不等价的不可约表示的次数的平方和正好等于 G 的阶.

定理 2. 3. 3 中的条件"K 是代数封闭域"可以减弱，我们在下面的定理 2. 3. 6 的(ii)中将给出 G 的所有不等价的不可约表示的次数的平方和等于 G 的阶的充分必要条件.

现在我们进一步讨论有限群 G 在特征不能整除$|G|$的域 K 上的所有不等价的不可约表示的数目与群 G 本身的性质有什么关系?

定理 2. 3. 4 有限群 G 在特征不能整除$|G|$的域 K 上所有不等价的不可约表示的数目 s 不超过 G 的共轭元素类的数目 r.

证明 设群代数 $K[G]$到它的极小左理想的一个直和分解式为(1)，并且 $K[G]$到极小双边理想的直和分解式为(3)，其中$A_i=K[G]e_i, i=1,2,\cdots,s$；$\{e_1,e_2,\cdots,e_s\}$是 $K[G]$的全部中心本原幂等元. 在定理 2. 2. 3 的(ii)的证明过程中已证 $A_iA_k=(0)$当 $i\neq k$. 从而容易验证有

$$Z(K[G]) = Z(A_1)\oplus Z(A_2)\oplus\cdots\oplus Z(A_s).\tag{8}$$

令 $D_i = \mathrm{Hom}_{A_i}(L_{i1}, L_{i1})$，记 $n_i = \dim_{D_i}(L_{i1})$. 由(6)式得

$$Z(A_i) \cong Z(M_{n_i}(D_i)) \cong Z(D_i). \tag{9}$$

在定理 2.2.4 的(i)中已证$(k1)_R \in D_i$，于是可考虑 K 到 D_i 的映射：$k \mapsto (k1)_R$. 容易看出此映射保持加法，保持乘法，所以它是环同态. 容易看出这个同态的核等于$\{0\}$，因此此映射是单射. 还可看出此映射是域 K 上向量空间 K 到 D_i 的同态，因此它是域 K 上代数 K 到 D_i 的同态. 从而可把 K 嵌入到 D_i 中，把 K 视为 D_i 的子代数. 显然 $K \subset Z(D_i)$. 于是从(8)和(9)得到

$$Z(K[G]) \cong Z(D_1) \dotplus \cdots \dotplus Z(D_s) \supset \underbrace{K \dotplus \cdots \dotplus K}_{s}. \tag{10}$$

因此 $\dim_K Z(K[G]) \geqslant s$.

下面来求 $Z(K[G])$的一个 K-基.

因为群代数 $K[G]$的一个 K-基是群 G 的全部元素，所以

$$a \in Z(K[G]) \Longleftrightarrow g^{-1}ag = a \text{ 对一切 } g \in G.$$

设 $a = \sum\limits_{x \in G} k_x x$，其中 $k_x \in K$. 则

$$g^{-1}ag = \sum_{x \in G} k_x g^{-1} x g = \sum_{y \in G} k_{gyg^{-1}} y = \sum_{x \in G} k_{gxg^{-1}} x.$$

于是 $a \in Z(K[G])$当且仅当

$$k_{gxg^{-1}} = k_x, \quad \forall\, g, x \in G. \tag{11}$$

(11)式意味着 a 的表达式 $\sum\limits_{x \in G} k_x x$ 中的系数 k_x 作为 x 的函数在 G 的每一个共轭元素类上取常数值.

设 $C_1, C_2, \cdots, C_r$ 是 G 的全部共轭元素类，令

$$c_i = \sum_{x \in C_i} x, \quad i = 1, 2, \cdots, r,$$

称 c_i 为 C_i 的类和. 由上述结果知，$c_i \in Z(K[G])$，$i = 1, 2, \cdots, r$. 在每个共轭类 C_i 里取一个代表元素 x_i，则

$$a = \sum_{x \in G} k_x x \in Z(K[G]) \Longleftrightarrow a = \sum_{i=1}^{r} k_{x_i} c_i,$$

这说明 $c_1, c_2, \cdots, c_r$ 是 $Z(K[G])$的一组生成元. 又显然 $c_1, c_2, \cdots, c_r$

是 K-线性无关的，因此 $c_1,c_2,\cdots,c_r$ 是 $Z(K[G])$ 的一个 K-基. 从而

$$r = \dim_K Z(K[G]) \geqslant s. \quad \blacksquare$$

定理 2.3.5 设 G 是有限群，K 是特征不能整除 $|G|$ 的域. 沿用本节开头的记号. 如果 $D_i \cong K, i=1,2,\cdots,s$，则 G 的所有不等价的不可约 K 表示的数目等于 G 的共轭类的数目.（注意：反之不成立，例子可见本节习题第 5 题，并且利用下面的定理 2.3.6 的(ii)的结果.）

证明 如果对每个 i 都有 $D_i \cong K$，则定理 2.3.4 的证明过程中(9)式变成

$$Z(A_i) \cong Z(M_{n_i}(D_i)) \cong Z(M_{n_i}(K)) \cong K.$$

从而由(8)式得

$$Z(K[G]) \cong K \dotplus \cdots \dotplus K.$$

因此 $\dim_K Z(K[G]) = s$. 又从定理 2.3.4 证明的后半部分知道 $\dim_K Z(K[G]) = r$，所以 $s=r$，其中 r 是 G 的共轭类的数目. 这里顺便指出：此时，$K[G]$ 的全部中心本原幂等元 $\{e_1,e_2,\cdots,e_s\}$ 也是 $Z(K[G])$ 的一个 K-基，这是因为两个不相等的中心本原幂等元必正交，从而易推出 $e_1,e_2,\cdots,e_s$ 是 K-线性无关的，又由于 $\dim_K Z(K[G]) = s$，所以 $e_1,e_2,\cdots,e_s$ 是 $Z(K[G])$ 的一个 K-基. $\blacksquare$

推论 2.3.1 有限群 G 在特征不能整除 $|G|$ 的代数闭域 K 上的所有不等价的不可约表示的数目等于 G 的共轭类的数目.

证明 据推论 2.2.6 知，$D_i \cong K, i=1,2,\cdots,s$. 然后由定理 2.3.5 立即得到结论. $\blacksquare$

现在我们来讨论有限群 G 在特征不能整除 $|G|$ 的域 K 上的不可约表示的次数问题.

定理 2.3.6 设 G 是有限群，K 是特征不能整除 $|G|$ 的域. 记号同定理 2.3.5. 令 $D_i = \mathrm{Hom}_{A_i}(L_{i1}, L_{i1})$，设 $n_i = \dim_{D_i} L_{i1}$，设 L_{i1} 提供的 G 的不可约表示 φ_i 的次数为 l_i，φ_i 在正则表示 ρ 中的重数为 m_i，$1 \leqslant i \leqslant s$，则

(i) $m_i=n_i, l_i=m_i\dim_K D_i$，并且 $|G| = \sum_{i=1}^{s} l_i m_i$；

(ii) $|G| \leqslant \sum_{i=1}^{s} l_i^2$，并且等号成立当且仅当 $D_i \cong K$ 对一切 $i(1\leqslant i\leqslant s)$；此时 φ_i 在正则表示 ρ 中的重数等于 φ_i 的次数，$i=1,2,\cdots,s$.

证明 (i) 据定理 2.2.4 知，$\dim_K L_{i1}=(\dim_K D_i)(\dim_{D_i} L_{i1})$. 从而 $l_i=n_i(\dim_K D_i)$. 据推论 2.2.5 知，L_{i1} 在 $K[G]$ 中的重数 m_i 等于 n_i，因此，$l_i=m_i(\dim_K D_i)$ $(i=1,2,\cdots,s)$.

由于 L_{ij} 是 $K[G]$ 的左理想，从而是左 $K[G]$-模. 由于域 K 上代数 $K[G]$ 的左模具有域 K 上向量空间的结构，并且模同构也具有向量空间同构的性质，因此 $\dim_K L_{ij}=\dim_K L_{i1}, i=1,2,\cdots,s; j=1,2,\cdots,m_i$. 于是从(1)式得

$$|G| = \sum_{i=1}^{s} m_i l_i.$$

(ii) 把 $m_i=\dfrac{l_i}{\dim_K D_i}$ 代入上式得

$$|G| = \sum_{i=1}^{s} \frac{l_i^2}{\dim_K D_i} \leqslant \sum_{i=1}^{s} l_i^2,$$

显然，等号成立当且仅当 $D_i \cong K$ 对一切 $i(1\leqslant i\leqslant s)$. ▌

下面我们来求几个群的所有不等价的不可约 K-表示.

例 2.3.1 求对称群 S_3 的所有不等价的不可约 K-表示，其中域 K 的特征不能整除 6.

解 据例 1.2.1 知，S_3 恰有两个 1 次 K-表示：φ_0 和 φ_1，其中 φ_0 是主表示；φ_1 把偶置换映到 1，把奇置换映到 -1.

S_3 的共轭类有 3 个：$\{(1)\}, \{(12),(13),(23)\}, \{(123),(132)\}$. 据定理 2.3.4，$S_3$ 的不等价的不可约 K-表示的数目 $s\leqslant 3$. 据定理 2.3.6 得：S_3 有一个大于 1 次的不可约 K-表示 φ_2. 据命题 1.3.2 知，S_3 有一个 2 次不可约 K-表示，它是由 S_3 的 3 次置换表示分解得到的：设 $\Omega=\{x_1,x_2,x_3\}$，S_3 在 Ω 上有一个自然作用：

$\sigma \circ x_i = x_{\sigma(i)}, i=1,2,3$. 这个作用引起 S_3 在域 K 上的 3 次置换表示，记作(φ, V)，其中

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^{3} a_i x_i \,|\, a_i \in K, \quad i = 1,2,3 \right\}.$$

令 $V_1 = \langle \sum x_i \rangle, V_2 = \left\{ \sum a_i x_i \middle| \sum a_i = 0 \right\}$. 则 $V = V_1 \oplus V_2$. φ 在 S_3 不变子空间 V_2 上的子表示 φ_2 就是 S_3 的 2 次不可约表示. 在 V_2 中取一个基：$\varepsilon_1 = x_1 - x_2, \varepsilon_2 = x_1 - x_3$. 因为

$$\varphi_2(12)\varepsilon_1 = x_2 - x_1 = -\varepsilon_1, \quad \varphi_2(12)\varepsilon_2 = x_2 - x_3 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

所以

$$\Phi_2(12) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

因为 $\varphi_2(123)\varepsilon_1 = x_2 - x_3 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varphi_2(123)\varepsilon_2 = x_2 - x_1 = -\varepsilon_1$，所以

$$\Phi_2(123) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 S_3 由(12)、(123)生成，所以 S_3 的其余元素在矩阵表示 Φ_2 下的像易求出.

由上述知：S_3 恰有 3 个不等价的不可约 K-表示：φ_0, φ_1 和 φ_2.

例 2.3.2 求 10 阶二面体群 $D_5 = \langle a, b \,|\, a^5 = b^2 = 1, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$的所有不等价的不可约实表示.

解 因为$|D_5/\langle a \rangle| = 2$，所以$\langle a \rangle \supseteq D_5'$，其中 D_5'是 D_5 的换位子群. 因为 $a^2 = aa = aba^{-1}b^{-1} \in D_5'$，所以$\langle a^2 \rangle \subset D_5'$. 因为$\langle a^2 \rangle = \langle a \rangle$，所以 $D_5' = \langle a \rangle$. 从而 D_5 有两个 1 次实表示，它是由商群 $D_5/\langle a \rangle$的 1 次实表示提升得到：一个是 D_5 的主表示 φ_0，另一个记作 φ_1：陪集$\langle a \rangle$中每个元素在 φ_1 下的像为 1，陪集 $b\langle a \rangle$中每个元素在 φ_1 下的像为-1.

易看出 $C_{D_5}(a^i) = \langle a \rangle$，因此 a^i 所在的共轭类里元素的数目为 2. 易看出 $C_{D_5}(b) = \langle b \rangle$，因此 b 所在的共轭类里元素的数目为 5. 从而易求出 D_5 有 4 个共轭类：$\{1\}, \{a, a^4\}, \{a^2, a^3\}, \{b, ba, ba^2, ba^3, ba^4\}$. 因此 D_5 的不等价的不可约实表示的数目 $s \leqslant 4$.

因为 D_5 与正五边形的对称群 G 同构，所以我们可利用几何意义来求 D_5 的一个 2 次不可约实表示. 设 α 表示平面上绕正五边形 $ABCDE$ 的中心 O 转角为$\frac{2\pi}{5}$的旋转，β 表示平面上关于直线 OA 的反射. 设 D_5 到 G 的同构映射 φ 把 a 映成 α，把 b 映成 β. 把平面上以 O 为起点的所有向量组成的实向量空间记作 V，显然 $G<\mathrm{GL}(V)$. 因此 φ 就是 D_5 的一个 2 次实表示，并且是忠实的. 又由于 D_5 是非 abel 群，据例 1.3.4 得 φ 是不可约的. 把这个 φ 记成 φ_2.

利用 D_5 的自同构 σ: $a\mapsto a^2, b\mapsto b, a^ib^j\mapsto a^{2i}b^j$ $(0\leqslant i\leqslant 4, 0\leqslant j\leqslant 1)$ 与 φ_2 的合成可得到 D_5 的一个 2 次实表示 φ_2^σ. 据命题 1.3.3 知：φ_2^σ 也不可约. 为了说明 φ_2^σ 与 φ_2 不等价，我们在 V 中取一个基 $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ 使得$[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2]$为平面的直角坐标系，其中 $\vec{e}_1$ 为$\overrightarrow{OA}$方向的单位向量. 在此基下，φ_2 提供的矩阵表示 Φ_2 为

$$\Phi_2(a)=\begin{pmatrix}\cos\frac{2\pi}{5} & -\sin\frac{2\pi}{5}\\ \sin\frac{2\pi}{5} & \cos\frac{2\pi}{5}\end{pmatrix},\quad \Phi_2(b)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

φ_2^σ 提供的矩阵表示 Φ_2^σ 为：

$$\Phi_2^\sigma(a)=\begin{pmatrix}\cos\frac{4\pi}{5} & -\sin\frac{4\pi}{5}\\ \sin\frac{4\pi}{5} & \cos\frac{4\pi}{5}\end{pmatrix},\quad \Phi_2^\sigma(b)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

假如 Φ_2 与 Φ_2^σ 等价，则存在一个可逆矩阵 $X=(x_{ij})$使得 $\Phi_2^\sigma(g)=X^{-1}\Phi_2(g)X, \forall\, g\in D_5$. 取 $g=b$，可推出 $x_{12}=x_{21}=0$. 再取 $g=a$ 可推出 $x_{11}\cos\frac{2\pi}{5}=x_{11}\cos\frac{4\pi}{5}$，由此得出 $x_{11}=0$，这与 X 是可逆矩阵矛盾. 因此 Φ_2 与 Φ_2^σ 不等价，从而 φ_2 与 φ_2^σ 不等价.

由上述知：D_5 恰有 4 个不等价的不可约实表示：$\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_2^\sigma$.

例 2.3.3 求对称群 S_4 的所有不等价的不可约实表示.

解 据例 1.2.1 知,S_4 恰有两个 1 次实表示:主表示 φ_0 和 1 次表示 φ_1,φ_1 把偶置换映成 1,把奇置换映成-1.

S_4 的共轭类有 5 个,其代表元素为:(1),(12),(12)(34),(123),(1234). 于是 S_4 的不等价的不可约实表示的数目 $s\leqslant 5$. 又据定理 2.3.6 知:$s>2$.

据命题 1.3.2 知:S_4 有一个 3 次不可约实表示,它是由 S_4 的 4 次置换表示分解得到的. 设 $\Omega=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$,令 $V=\left\{\sum_{i=1}^{4}a_ix_i \mid a_i\in\boldsymbol{R},i=1,2,\cdots,4\right\}$,$V_2=\left\{\sum a_ix_i \,\Big|\, \sum a_i=0\right\}$. S_4 在 Ω 上的自然作用引起的 4 次置换表示 φ 在不变子空间 V_2 上的限制就是 S_4 的一个 3 次不可约实表示,记作 φ_2. 在 V_2 中取一个基:x_1-x_4,x_2-x_4,x_3-x_4. 因为

$$\varphi_2(12)(x_1-x_4)=x_2-x_4,$$
$$\varphi_2(12)(x_2-x_4)=x_1-x_4,$$
$$\varphi_2(12)(x_3-x_4)=x_3-x_4;$$

所以 $\varphi_2(12)$在此基下的矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}_2(12)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

因为

$$\varphi_2(1234)(x_1-x_4)=x_2-x_1=-(x_1-x_4)+(x_2-x_4),$$
$$\varphi_2(1234)(x_2-x_4)=x_3-x_1=-(x_1-x_4)+(x_3-x_4),$$
$$\varphi_2(1234)(x_3-x_4)=x_4-x_1=-(x_1-x_4),$$

所以 $\varphi_2(1234)$在上述基下的矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}_2(1234)=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

因为 S_4 由(12),(1234)生成,所以 S_4 的其余元素在矩阵表示 $\boldsymbol{\Phi}_2$ 下的像易求出.

现在我们利用几何意义来求 S_4 的一个 3 次不可约实表示. 在 3 维几何空间中,保持一个正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 不变的所有旋转组成的群 G 称为这个正方体的旋转对称群. 绕正方体的上下底面中心连线旋转 $\pi/2$ 的旋转记作 α_1,绕前后两个侧面的中心连线转角为 $\pi/2$ 的旋转记作 α_2,绕左右两个侧面的中心连线旋转 $\pi/2$ 的旋转记作 α_3,显然 $\alpha_1^4=\alpha_2^4=\alpha_3^4=1$,其中 1 表示恒等变换. 绕正方体主对角线 AC',BD',CA',DB' 的每一条转角为 $2\pi/3$ 的旋转分别记作 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$,易看出它们均属于 G,并且 $\beta_i^3=1,1\leqslant i\leqslant 4$. 绕正方体对棱中点连线的每一根转角为 π 的旋转 $\gamma_i\in G,1\leqslant i\leqslant 6$. 于是 G 共有 24 个元素. 由于 G 保持这个正方体不变,所以 G 作用在由四条主对角线组成的集合 Ω 上,于是 G 到 Ω 的全变换群 S_Ω(亦即 S_4,当 AC'、BD'、CA'、DB' 分别用 1、2、3、4 表示时)有一个同态,显然这个同态的核仅由 G 的单位元素组成,又 $|G|=|S_4|$,所以 $G\cong S_4$. 设 V 是以正方体的中心 O 为起点的所有 3 维向量组成的实向量空间,则 G 是 $\mathrm{GL}(V)$ 的子群,从而 S_4 到 G 的同构映射 ψ 就是 S_4 的一个 3 次实表示. 容易看出:

$$\psi^{-1}(\alpha_1)=(1234),\quad \psi^{-1}(\alpha_2)=(1342),\quad \psi^{-1}(\alpha_3)=(1324),$$
$$\psi^{-1}(\beta_1)=(243),\quad \psi^{-1}(\beta_2)=(143),\quad \psi^{-1}(\beta_3)=(142),$$
$$\psi^{-1}(\beta_4)=(132),\quad \psi^{-1}(\gamma_1)=(13),\quad \psi^{-1}(\gamma_2)=(24),$$
$$\psi^{-1}(\gamma_3)=(12),\quad \psi^{-1}(\gamma_4)=(34),\quad \psi^{-1}(\gamma_5)=(14),$$
$$\psi^{-1}(\gamma_6)=(23).$$

在空间中建立直角坐标系$[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$,$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 分别是 O 到前侧面 $AA'B'B$ 的中心、右侧面 $BB'C'C$ 的中心、上底面 $ABCD$ 的中心连线方向上的单位向量. 于是 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 是 V 的一个基,在此基下,ψ 提供的矩阵表示 Ψ 为:

$$\Psi(12)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ \Psi(1234)=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

其中 $\psi(12)=\gamma_3$ 是绕对棱 AB 与 $D'C'$ 的中点连线转角为 π 的旋

转. 由于 $S_4=\langle(12),(1234)\rangle$，所以 S_4 的其余元素在 Ψ 下的像易求出. 假如 ψ 可约，则 V 有一个 1 维的 S_4 不变子空间，即 V 中存在一个向量 ε，它在正方体的旋转对称群 G 的每个元素作用下均变成 ε 的倍数（即与 ε 同向或反向），显然这样的向量不存在，因此 ψ 不可约. 把 ψ 记作 φ_3.

我们来说明 φ_3 与 φ_2 不等价：从它们的矩阵表示可看出，$\Phi_3(12)$ 的迹为 -1，$\Phi_2(12)$ 的迹为 1，因此 $\Phi_3(12)$ 与 $\Phi_2(12)$ 不相似，从而 Φ_3 与 Φ_2 不等价，所以 φ_3 与 φ_2 不等价.

由于 $1^2+1^2+3^2+3^2=20<|S_4|$，据定理 2.3.6 知，S_4 还有一个不可约实表示，现在我们来找这个不可约表示. S_4 有一个正规子群 $N=\{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$. S_3 可看成是 S_4 的子群. 显然 $S_3\cap N=\{(1)\}$. 因为 $|NS_3|=24=|S_4|$，所以 $S_4=NS_3$，即 S_4 是 N 与 S_3 的半直积. 从而 $S_4/N\cong S_3$. S_4/N 的元素为：$N,(12)N,(13)N,(23)N,(123)N,(132)N$. S_4/N 到 S_3 的同构映射分别把 $N,(12)N$ 映成 $(1),(12)$ 等等. 因为 S_3 有一个 2 次不可约实表示，所以 S_4/N 有一个 2 次不可约实表示，它的提升是 S_4 的 2 次不可约实表示，记作 φ_4. 利用例 2.3.1 中 S_3 的不可约 2 次表示的结果可得到：陪集 $(12)N$ 里每个元素在 Φ_4 下的像为

$$\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix};$$

陪集 $(123)N$ 里每个元素在 Φ_4 下的像为

$$\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

等等.

由上述得，S_4 恰有 5 个不等价的不可约实表示，它们是：φ_0，$\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4$.

例 2.3.4 求 3 阶循环群 $G=\langle a\rangle$ 的所有不等价的不可约实表示.

解 先求 G 的 1 次实表示. 设 φ 是 G 的 1 次实表示，因为 a^3

$=1$，所以 $1=\varphi(a^3)=\varphi(a)^3$，即 $\varphi(a)$ 是 3 次单位根. 因为考虑的是实数域，所以 $\varphi(a)=1$，从而 $\varphi(a^i)=1, 0\leqslant i\leqslant 2$. 这说明 G 的 1 次实表示只有一个：主表示 φ_0.

因为 $1^2<|G|$，所以 G 应当有次数大于 1 的不可约实表示. 我们从群代数 $\boldsymbol{R}[G]$ 上的左正则模 $\boldsymbol{R}[G]$ 的直和分解来寻找 G 的次数大于 1 的不可约实表示. 令

$$V_1=\langle 1+a+a^2\rangle, V_2=\left\{\sum_{i=0}^{2}k_i a^i \,\middle|\, \sum k_i=0\right\}.$$

易验证 V_1 和 V_2 是 G 不变子空间，从而它们是左正则 $R[G]$ 模的子模. 易验证 $\boldsymbol{R}[G]=V_1\oplus V_2$. 显然 V_1 作为域 $\boldsymbol{R}$ 上向量空间的维数是 1，它提供的 G 的表示就是主表示 φ_0. V_2 的维数是 2，显然 $1-a, 1-a^2$ 是 V_2 的一个基. 假如 V_2 有一个非平凡的子模 U，由于实数域 $\boldsymbol{R}$ 上的群代数 $\boldsymbol{R}[G]$ 是半单的，因此左 $\boldsymbol{R}[G]$-模 V_2 是完全可约的，从而存在子模 U' 使得 $V_2=U\oplus U'$. 显然 U 和 U' 都是 1 维的. 于是 $\boldsymbol{R}[G]=V_1\oplus U\oplus U'$. 这说明任一不可约 $\boldsymbol{R}[G]$-模都是 1 维的，即 G 的任一不可约实表示都是 1 次的，矛盾. 所以 V_2 是不可约的. V_2 提供的 G 的表示 φ_1 就是 G 的 2 次不可约实表示，它在 V_2 的基 $1-a$，$1-a^2$ 下提供的矩阵表示 Φ_1 为：

$$\Phi_1(a)=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad \Phi_1(a^2)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}.$$

因为 $\boldsymbol{R}[G]=V_1\oplus V_2$，并且 V_1, V_2 都是不可约子模，所以 G 恰有两个不可约实表示，它们是 φ_0, φ_1.

例 2.3.4 中 3 阶循环群 G 的不等价的不可约实表示的数目小于 G 的共轭类的数目；并且所有不等价的不可约实表示的次数的平方和 1^2+2^2 大于 G 的阶.

例 2.3.5 设域 K 的特征为 3，求 3 阶循环群 $G=\langle a\rangle$ 的所有不等价的不可约 K-表示.

解 因为域 K 的特征整除 $|G|$，所以 K 不包含本原 3 次单位根. 从而 G 的 1 次 K-表示只有主表示 φ_0. 因为 G 的指数 $m=3$，并

且 char$K=p=3$，所以 $m=p\cdot 1$. 显然 K 包含本原 1 次单位根(即,1)，从而据定理 1.5.1 后面的证明以及类似于定理 1.5.1 的说明方法知道：G 的每一个不可约 K-表示是 1 次的. 所以 G 的不可约 K-表示只有一个：主表示 φ_0.

例 2.3.5 说明：当域 K 的特征整除群 G 的阶时，G 的不等价的不可约 K-表示的数目可以小于 G 的共轭类的数目；并且 G 的不等价的不可约表示的次数的平方和可以小于 G 的阶. 下一节我们将继续给出这种情形的例子.

习　题　2.3

1. 求 8 阶二面体群 $D_4=\langle a,b\,|\,a^4=b^2=1,bab^{-1}=a^{-1}\rangle$ 的所有不等价的不可约实表示.

2. 求交错群 A_4 的三个不等价的不可约实表示.

3. 求四元数群 $G=\langle a,b\,|\,a^4=1,b^2=a^2,bab^{-1}=a^{-1}\rangle$ 的所有不等价的不可约复表示.

4. 设 D 为除环，K 为 D 的中心 $Z(D)$ 里的子域，于是 D 可看成是域 K 上的向量空间. 设 $\dim_K D<\infty$. 令 G 为 D 的乘法群的子群使得 D 中每个元素可以表成 G 中元素的 K-线性组合. 对于 $g\in G$，用 g_L 表示 D 到自身的一个映射：$x\mapsto gx,\forall\ x\in D$. 显然 g_L 是域 K 上向量空间 D 的线性变换，并且是可逆的. 令 φ 是 G 到 GL(D)的一个映射：$g\mapsto g_L,\forall\ g\in G$. 证明：$\varphi$ 是 G 的不可约 K-表示.

(**提示**：设 $U\neq(0)$ 是 D 的 G 不变子空间，去证 $U=D$.)

5. 求四元数群 $G=\langle a,b\,|\,a^4=1,b^2=a^2,bab^{-1}=a^{-1}\rangle$ 的一个 4 次不可约实表示.

(**提示**：考虑四元数体 $\boldsymbol{H}$，利用第 4 题的结果.)

6. 设 G 是有限群，K 是代数闭域. 证明：如果 G 有一个 abel 子群 H，则 G 的每一个不可约 K-表示的次数不超过$[G:H]$.

(**提示**：任取 G 的一个不可约 K-表示 φ，考虑 φ 在子群 H 上

的限制表示 $\varphi|H$. 设 W 是 V 的 H 不变子空间并且 W 是不可约的. 由于 H 是 abel 群, K 是代数闭域, 因此 H 的每一个不可约 K-表示是 1 次的, 从而 $\dim_K W=1$. 令 V'是由 V 的子集 $\{\varphi(g)w \mid g\in G, w\in W\}$ 生成的子空间, 显然 V'是 G 不变子空间, 从而 $V'=V$. 去证明同一陪集里的元素 g_1, g_2 使得 $\varphi(g_1)W=\varphi(g_2)W$. 由此去证明 $\dim_K V\leqslant[G:H]$.)

注 第 5 题指出四元数群 G 有一个 4 次不可约实表示, 又 G 有 4 个 1 次实表示, 于是 G 的不等价的不可约实表示的数目等于 G 的共轭类数目. 但是 $1^2+1^2+1^2+1^2+4^2>|G|$.

*§ 4 有限群的不可约表示(非半单的情形)

上一节例 2.3.5 指出: 3 阶循环群 G 在特征为 3 的域 K 上的不可约表示只有主表示一个. 这一节继续给出几个例子, 说明有限群在特征整除群的阶的域上的不可约表示与半单的情形(即, 在特征不能整除群的阶的情形)有很大的不同.

定理 2.4.1 设域 K 的特征为 3, 则 S_3 的不可约 K-表示只有两个: 主表示 φ_0 和一次表示 φ_1, 其中 φ_1 把偶置换映成 1, 把奇置换映成 -1.

证明 据例 1.2.1 知, S_3 恰有两个 1 次 K-表示: φ_0 和 φ_1. 现在任取 S_3 的一个不可约 K-表示 (φ, V). 因为 $(123)^3=(1)$, 所以 $\varphi(123)^3=1_V$. 于是 x^3-1 是线性变换 $\varphi(123)$ 的零化多项式. 因为 $\operatorname{char}K=3$, 所以 $x^3-1=(x-1)^3$. 于是 $\varphi(123)$ 的极小多项式形如 $(x-1)^m$, 其中 $m\in\{1,2,3\}$. 因此 1 是 $\varphi(123)$ 的特征值. 设 V_1 是属于 1 的特征子空间. 任取 $\alpha\in V_1$, 因为

$$\begin{aligned}\varphi(123)(\varphi(12)\alpha) &= \varphi[(123)(12)]\alpha = \varphi[(12)(132)]\alpha \\ &= \varphi(12)[\varphi(132)\alpha] = \varphi(12)[\varphi(123)^2\alpha] = \varphi(12)\alpha,\end{aligned}$$

所以 $\varphi(12)\alpha\in V_1$. 因为 $S_3=\langle(12),(123)\rangle$, 所以 V_1 是 S_3 不变子空间. 因为 (φ, V) 不可约, 所以 $V_1=V$. 于是 $\varphi(123)=1_V$. 从而

$\langle(123)\rangle \subset \mathrm{Ker}\varphi$. 记 $N=\langle(123)\rangle$，显然 $N \lhd S_3$. 据命题 1.2.1，由 φ 可得到商群 S_3/N 的表示 $\tilde{\varphi}$ 使得 φ 是 $\tilde{\varphi}$ 的提升. 据命题 1.3.3 知，由于 φ 不可约，从而 $\tilde{\varphi}$ 也不可约. 因为商群 S_3/N 是 2 阶循环群，并且域 K 包含本原 2 次单位根 -1，所以 S_3/N 的每一个不可约 K-表示都是 1 次的. 于是 $\tilde{\varphi}$ 是 1 次的，从而 φ 是 1 次的. 所以 S_3 的不可约 K-表示只有两个：φ_0 和 φ_1. ▌

定理 2.4.2 设域 K 的特征为 p，G 是有限 p 群，则 G 的不可约 K-表示只有一个：主表示 φ_0.

证明 设 $|G|=p^n$. 对 n 用归纳法. 当 $n=0$ 时，结论显然成立. 现在设 $n\geqslant 1$，并且假设命题对于小于 n 的情形成立. 考虑 p^n 阶群 G 的任意一个不可约 K-表示 (φ,V). 因为 p 群的中心不等于 $\{1\}$，所以可以在 $Z(G)$ 中取一个非单位元 a. 因为 $a^{p^n}=1$，所以 $\varphi(a)^{p^n}=1_V$. 从而 $x^{p^n}-1$ 是线性变换 $\varphi(a)$ 的零化多项式. 因为 $\mathrm{char}K=p$，所以 $x^{p^n}-1=(x-1)^{p^n}$. 从而 1 是 $\varphi(a)$ 的特征值. 设 V_1 是属于 1 的特征子空间. 任取 $g\in G$，任取 $\alpha\in V_1$，我们有

$$\varphi(a)[\varphi(g)\alpha]=\varphi(ag)\alpha=\varphi(ga)\alpha=\varphi(g)[\varphi(a)\alpha]=\varphi(g)\alpha.$$

因此 $\varphi(g)\alpha\in V_1$. 这说明 V_1 是 G 不变子空间. 由于 (φ,V) 不可约，因此 $V_1=V$. 从而 $\varphi(a)=1_V$. 所以 $a\in\mathrm{Ker}\varphi$. 由此得出 $Z(G)\subset\mathrm{Ker}\varphi$. 于是由 φ 可得到商群 $G/Z(G)$ 的 K-表示 $\tilde{\varphi}$ 使得 φ 是 $\tilde{\varphi}$ 的提升. 由于 φ 不可约，所以 $\tilde{\varphi}$ 也不可约. 由归纳假设，$\tilde{\varphi}$ 是 $G/Z(G)$ 的主表示. 从而 φ 是 G 的主表示. 由归纳法原理，命题得证. ▌

第三章 群的特征标

从第二章§3我们已经知道：有限群G在特征不能整除$|G|$的域K上的不等价的不可约表示的数目不超过G的共轭类的数目；并且所有不等价的不可约表示的次数的平方和不小于$|G|$. 从第一章§2我们又知道：群G的每一个1次表示是商群G/G'的某个1次表示的提升，而G/G'是abel群，在第一章§5已完全决定了有限abel群在包含本原m次单位根（m是该abel群的指数）的域上的所有1次表示. 这些结果连同第一章§2介绍的从已知表示构造新表示的一些方法一起为寻找给定群G的所有不等价的不可约表示提供了有力的工具. 作为例子，我们在第二章§3中求出了S_3,D_5,S_4的所有不等价的不可约实表示. 在这些例子中主要运用了上述结果和方法，此外也运用了几何意义以及群在适当集合上的作用. 为了对于一个给定的群，求出它的所有不等价的不可约表示，我们需要进一步探讨一些方法，这就是我们在第三、四、五章要做的.

第二章是利用群代数$K[G]$上的模来研究群G的表示. 第三章则要利用群G上的一种特殊函数——群G的特征标来研究G的表示. 本章讨论的表示都是有限维的.

§1 特征标的定义和基本性质

定义1 设K是任一域，(φ,V)是群G的一个K-表示. G的表示φ提供的**特征标**是G上的如下定义的函数χ_φ：

$$\chi_\varphi(g)=\mathrm{tr}(\varphi(g)),\quad \forall\, g\in G,$$

其中$\mathrm{tr}(\varphi(g))$是线性变换$\varphi(g)$的迹（即，$\varphi(g)$在V的一个基下的矩阵$\Phi(g)$的迹）.

例如，S_3 的 2 次不可约实表示 φ_2 提供的特征标 χ_2 为：

$$\chi_2(1)=2,\quad \chi_2(12)=0,\quad \chi_2(13)=0,$$
$$\chi_2(23)=0,\quad \chi_2(123)=-1,\quad \chi_2(132)=-1.$$

从这个例子里我们看到 $\chi_2(1)$等于 φ_2 的次数；χ_2 在 S_3 的同一个共轭类里的元素上的函数值相同. 这在一般情形下也正确.

命题 3.1.1 设 K 是任一域，χ 是群 G 的表示(φ,V)提供的特征标，G 的单位元记作 1，则

(i) $\chi(1)=(\dim_K V)\cdot 1$，其中等号右边的 1 是域 K 的单位元；

(ii) $\chi(gag^{-1})=\chi(a)$，$\forall\ g,a\in G$；即，χ 在 G 的同一个共轭类里的元素上的函数值相同.

证明 (i) $\chi(1)=\mathrm{tr}(\varphi(1))=\mathrm{tr}(I)=(\dim_K V)\cdot 1$，其中 I 表示域 K 上的单位矩阵.

(ii) $$\chi(gag^{-1})=\mathrm{tr}(\varphi(gag^{-1}))=\mathrm{tr}(\varphi(g)\varphi(a)\varphi(g)^{-1})$$
$$=\mathrm{tr}(\varphi(a))=\chi(a),\ \forall\ g,a\in G.\quad \blacksquare$$

定义 2 设 K 是任一域，G 上的 **K 值函数**是指 G 到 K 的一个映射. G 上的 K 值函数 f 称为**类函数**，如果它在 G 的每一个共轭类上取常数值，即 $f(gag^{-1})=f(a)$，$\forall\ g,a\in G$.

由命题 3.1.1 知，群 G 的任一 K-表示 φ 提供的特征标 χ_φ 是 G 的类函数.

定义 3 设 K 是任一域，群 G 的主表示 φ_0 提供的特征标称为 G 的**主特征标**，记作 χ_0.

命题 3.1.2 设 K 是任一域，群 G 的所有 K 值函数组成的集合记作 K^G. 在 K^G 中定义加法、数量乘法、乘法如下：

$$(f_1+f_2)(g):=f_1(g)+f_2(g),$$
$$(kf)(g):=k(f(g)),$$
$$(f_1f_2)(g):=f_1(g)f_2(g),$$

其中 $f_1,f_2,f\in K^G$，$g\in G$，$k\in K$. 则 K^G 是域 K 上的向量空间，并且 K^G 也是一个具有单位元 χ_0 的环. G 的所有类函数组成的集合

记作 $Cf_K(G)$，它是向量空间 K^G 的子空间，它也是环 K^G 的子环并且具有单位元 χ_0.

证明 直接验证即可. ▌

现在我们来讨论群 G 的 K-表示与它提供的特征标之间的关系.

命题 3.1.3 设 K 是任一域，则群 G 的等价的 K-表示提供相等的特征标.

证明 设 (φ,V) 和 (ψ,W) 是群 G 的两个等价的 K-表示，则存在向量空间 V 到 W 上的一个同构 σ 使得

$$\psi(g)=\sigma\varphi(g)\sigma^{-1},\quad \forall\, g\in G.$$

分别在 V,W 中取一个基，设 σ 对于这两个基的矩阵是 S，φ,ψ 提供的矩阵表示分别为 Φ,Ψ，则

$$\Psi(g)=S\Phi(g)S^{-1},\quad \forall\, g\in G.$$

从而 $\chi_\psi(g)=\mathrm{tr}(\Psi(g))=\mathrm{tr}(S\Phi(g)S^{-1})=\mathrm{tr}(\Phi(g))=\chi_\varphi(g)$，$\forall\, g\in G$. 因此 $\chi_\psi=\chi_\varphi$. ▌

反之，如果 $\chi_\psi=\chi_\varphi$，是否有 $\varphi\approx\psi$? 我们将在 § 2 讨论这个问题.

在第二章 § 2 我们曾介绍了从已知表示构造新表示的一些方法，现在我们来讨论已知表示的特征标与新表示的特征标之间的关系.

命题 3.1.4 设 K 是任一域，(φ,V) 是群 G 的 K-表示，U 是 V 的非平凡的 G 不变子空间，φ 对于 U 的子表示和商表示分别记作 φ_U 和 $\varphi_{V/U}$，则

$$\chi_\varphi=\chi_{\varphi_U}+\chi_{\varphi_{V/U}},$$

即，φ 的特征标等于子表示的特征标与商表示的特征标之和.

证明 从第一章 § 2 的公式(4)立即得到. ▌

命题 3.1.5 设 K 是任一域，φ_1 和 φ_2 是群 G 的两个 K-表示，则 $\chi_{\varphi_1\oplus\varphi_2}=\chi_{\varphi_1}+\chi_{\varphi_2}$，即，$\varphi_1$ 与 φ_2 的直和提供的特征标等于 φ_1 的特征标与 φ_2 的特征标之和.

证明 从第一章§2的公式(5)立即得到. ▌

命题3.1.5可以推广到群G的有限多个K-表示的直和提供的特征标的情形.

命题3.1.6 设K是任一域,(φ,V)是群G的K-表示.如果$V=V_1\oplus V_2$,其中V_1,V_2是φ的非平凡不变子空间,并且把φ在V_i上的子表示记作$\varphi_i(i=1,2)$,则

$$\chi_\varphi=\chi_{\varphi_1}+\chi_{\varphi_2}.$$

证明 从第一章§2的公式(6)立即得到. ▌

命题3.1.6可以推广到群G的K-表示φ的表示空间V是有限多个非平凡G不变子空间的直和的情形.

命题3.1.7 设K是任一域,则群G的任意两个特征标的和仍是G的特征标.

证明 设χ_1和χ_2是G的两个特征标,设χ_1由G的K-表示φ_1提供,χ_2由G的K-表示φ_2提供.作φ_1与φ_2的直和,据命题3.1.5得$\chi_{\varphi_1\oplus\varphi_2}=\chi_1+\chi_2$.这表明$\chi_1+\chi_2$是$G$的$K$-表示$\varphi_1\oplus\varphi_2$提供的特征标. ▌

显然,命题3.1.7可以推广成:群G的任意有限多个特征标的和仍是G的特征标.

注意 群G的两个特征标的差不一定是G的特征标.

定义4 设K是任一域,φ是群G的K-表示,H是G的子群.由φ在子群H上的限制表示$\varphi|H$提供的H的特征标称为φ提供的特征标χ**在H上的限制**,记作$\chi|H$.显然有

$$\chi|H(h)=\chi(h),\quad\forall h\in H.$$

定义5 设K是任一域,群G的不可约K-表示提供的特征标称为**不可约特征标**.

(容易看出:若$\chi|H$不可约,则χ不可约;反之不成立.)

命题3.1.8 设K是任一域,N是群G的正规子群,设$\tilde{\varphi}$是商群G/N的K-表示,$\tilde{\varphi}$的提升记作φ.$\tilde{\varphi}$提供的G/N的特征标记作$\tilde{\chi}$,φ提供的G的特征标记作χ,则

$$\chi(g) = \tilde{\chi}(gN), \quad \forall\, g \in G;$$

并且 χ 不可约当且仅当 $\tilde{\chi}$ 不可约.

证明 由商群 G/N 的表示 $\tilde{\varphi}$ 的提升的定义以及命题 1.3.3 立即得到. ▌

命题 3.1.9 设 K 是任一域，φ 是群 G 的 K-表示，σ 是群 G 的自同构，φ 提供的特征标记作 χ，φ 通过 σ 的挠表示 φ^σ 提供的特征标记作 χ^σ，则

$$\chi^\sigma(g) = \chi(\sigma(g)), \quad \forall\, g \in G;$$

并且 χ^σ 不可约当且仅当 χ 不可约.

证明 由挠表示 φ^σ 的定义及命题 1.3.3 立即得到. ▌

推论 3.1.1 设 K 是任一域，N 是群 G 的正规子群，给定 $g \in G$，映射 $\tau_g: x \mapsto g^{-1}xg(\forall\, x \in N)$，是 N 的自同构. 设 ψ 是 N 的 K-表示，由 g 决定的 ψ 的共轭表示（即 ψ 通过 τ_g 的挠表示）记作 ψ^g. 把 ψ 提供的特征标记作 χ，ψ^g 提供的特征标记作 χ^g，则

$$\chi^g(a) = \chi(g^{-1}ag), \quad \forall\, a \in N;$$

并且 χ^g 不可约当且仅当 χ 不可约.

证明 把命题 3.1.9 对群 N 来应用立即得到. ▌

命题 3.1.10 设 K 是任一域，(φ, V) 是群 G 的 K-表示，(φ^*, V^*) 是 (φ, V) 的逆步表示，其中 φ^* 由下式定义：

$$(\varphi^*(g)f)v = f(\varphi(g^{-1})v), \quad \forall\, g \in G, f \in V^*, v \in V.$$

设 φ 提供的特征标为 χ，把 φ^* 提供的特征标记作 χ^*，则

$$\chi^*(g) = \chi(g^{-1}), \quad \forall\, g \in G;$$

并且 χ^* 不可约当且仅当 χ 不可约. 称 χ^* 是 χ 的逆步特征标.

证明 把 φ 在 V 的一个基下提供的矩阵表示记作 Φ，把 φ^* 在 V^* 的对偶基下提供的矩阵表示记作 Φ^*. 从第一章 §2 的最后一段知道：$\Phi^*(g) = (\Phi(g)^{-1})'$，$\forall\, g \in G$. 从而立即得出 $\chi^*(g) = \chi(g^{-1})$. 据命题 1.3.4 得到：χ^* 不可约当且仅当 χ 不可约. ▌

现在来看有限群 G 的正则表示提供的特征标.

命题 3.1.11 设 K 是任一域，则有限群 G 的正则 K-表示 ρ

提供的特征标 χ_ρ 为：

$$\chi_\rho(g)=\begin{cases}|G|\cdot 1, & 当\ g=1,\\ 0, & 当\ g\neq 1.\end{cases}$$

证明 有限群 G 的正则 K-表示 ρ 的表示空间是 $K[G]$，一个基是 G 的全部元素. 于是由命题 3.1.1 得

$$\chi_\rho(1)=(\dim_K K[G])\cdot 1=|G|\cdot 1.$$

当 $g\neq 1$ 时，对于任意 $x\in G$ 有 $\rho(g)x=gx\neq x$. 因此 $\rho(g)$ 在 $K[G]$ 的一个基（即 G 的全部元素）下的矩阵，其主对角元全部是 0，从而其迹为 0. 因此 $\chi_\rho(g)=0$，当 $g\neq 1$. ▌

现在对域 K 作一些限制来研究有限群 G 的特征标的一些性质.

命题 3.1.12 设 G 是指数为 m 的有限群，K 是包含本原 m 次单位根的域. 设 χ 是 G 的 n 次 K-表示 φ 提供的特征标，则 $\chi(g)$ 是 m 次单位根的和，其中 g 是 G 的任意元素.

证明 因为 $g^m=1$，所以 $\varphi(g)^m=\varphi(g^m)=1_V$，其中 1_V 是表示空间 V 的恒等变换. 从而 x^m-1 是 $\varphi(g)$ 的零化多项式. 因为域 K 包含一个本原 m 次单位根 ξ，所以 x^m-1 在 K 中恰有 m 个根：$1,\xi,\cdots,\xi^{m-1}$. 从而 $\varphi(g)$ 的极小多项式 $h(x)$ 在 K 上能分解成不同的 1 次因式的连乘积. 因此 $\varphi(g)$ 可对角化. 从而 $\varphi(g)$ 的迹等于 $\varphi(g)$ 的特征值的和. 因为 $\varphi(g)$ 的特征多项式与极小多项式有相同的根（重数可以不同），所以 $\varphi(g)$ 的每一个特征值都是 ξ 的某个方幂. 从而 $\chi(g)$ 等于 n 个 m 次单位根的和. ▌

命题 3.1.13 设 G 是指数为 m 的有限群，K 是复数域的子域并且包含本原 m 次单位根. 设 χ 是 G 的 n 次 K-表示提供的特征标，Φ 是 φ 提供的矩阵表示，则对于 $g\in G$，有

(i) $\chi(g^{-1})=\overline{\chi(g)}$，这里 $\overline{\chi(g)}$ 是 $\chi(g)$ 的共轭复数；

(ii) $|\chi(g)|\leqslant\chi(1)$；

(iii) $|\chi(g)|=\chi(1)$ 当且仅当 $\Phi(g)$ 是主对角元为 m 次单位根的数量矩阵；

(iv) $\chi(g)=\chi(1)$ 当且仅当 $\Phi(g)$是单位矩阵.

证明 (i) 由命题 3.1.12 知,$\varphi(g)$的特征多项式的根都属于 K,设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\varphi(g)$的全部特征值,它们都是 m 次单位根. 从而 $|\lambda_i|=1$,因此 $\lambda_i^{-1}=\bar{\lambda}_i$,$i=1,2,\cdots,n$. 因为 $\Phi(g)^{-1}$的特征值为 $\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1}$,所以

$$\chi(g^{-1}) = \mathrm{tr}(\Phi(g^{-1})) = \mathrm{tr}(\Phi(g)^{-1}) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\bar{\lambda}_i = \overline{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i} = \overline{\chi(g)}.$$

(ii) 仍设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\varphi(g)$的全部特征值,有

$$|\chi(g)| = \left|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i| = n = \chi(1).$$

(iii) 如果 $\Phi(g)=\alpha I$,其中 α 是 m 次单位根,I 是 n 级单位矩阵,则$|\chi(g)|=|n\alpha|=n|\alpha|=n=\chi(1)$.

反之,设$|\chi(g)|=\chi(1)$,则

$$n = \chi(1) = |\chi(g)| = \left|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i| = n,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\varphi(g)$的全部特征值. 由此得出

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|. \tag{1}$$

我们知道:对于复数 $z_1,z_2(\neq 0)$. 有$|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$当且仅当 $z_1=az_2$ 对于某个实数 $a\geqslant 0$. 特别地当 z_1 和 z_2 都是单位根时,由$|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$可以推出 $z_1=z_2$. 于是对 n 用归纳法,从(1)式可以推出:$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n$. 由命题 3.1.12 的证明过程知道 $\varphi(g)$可对角化,因此 $\Phi(g)$相似于 $\lambda_1 I$,从而 $\Phi(g)=\lambda_1 I$.

(iv) 如果 $\Phi(g)=I$,则显然有 $\chi(g)=n=\chi(1)$.

反之,若 $\chi(g)=\chi(1)$,由(iii)知 $\Phi(g)=\lambda_1 I$,其中 λ_1 是 m 次单位根. 由此得出,$\chi(g)=n\lambda_1$. 从而 $n\lambda_1=n$,这就得出 $\lambda_1=1$. 所以 $\Phi(g)=I$. ▌

类似于群 G 的 K-表示提供的特征标,我们可以定义群代数

$K[G]$上左模提供的特征标：

定义 6 设 K 是任一域，G 是有限群. 设 V 是左 $K[G]$-模，它提供的群代数 $K[G]$ 的表示记作 φ^*. V（或者 φ^*）提供的**特征标**是 $K[G]$ 上的如下定义的函数 χ^*：

$$\chi^*(a) := \operatorname{tr}(\varphi^*(a)), \quad \forall\, a \in K[G].$$

设 φ^* 在 G 上的限制为 φ，则 φ 是群 G 的一个 K-表示，设 χ 是 G 的由 φ 提供的特征标，显然有

$$\chi(g) = \chi^*(g), \quad \forall\, g \in G. \tag{2}$$

因此 χ 是 χ^* 在 G 上的限制.

由线性变换的迹的性质容易推出

$$\chi^*(a+b) = \chi^*(a) + \chi^*(b), \quad \forall\, a,b \in K[G]; \tag{3}$$

$$\chi^*(ka) = k\chi^*(a), \quad \forall\, k \in K, a \in K[G]. \tag{4}$$

注意 一般地，$\chi^*(ab) \neq \chi^*(a)\chi^*(b)$，这是因为 $\operatorname{tr}(AB) \neq \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$，其中 A,B 是两个同级方阵.

由(2)，(3)和(4)得到

$$\chi^*\left(\sum k_g g\right) = \sum k_g \chi^*(g) = \sum k_g \chi(g). \tag{5}$$

(5)式说明：χ^* 完全被 χ 决定.

反之，如果给了有限群 G 的一个 K-表示 (φ, V)，则 V 可以成为左 $K[G]$-模. 设 φ 提供的特征标为 χ，V 提供的群代数 $K[G]$ 的表示记作 φ^*，V（或 φ^*）提供的特征标记作 χ^*，则

$$\chi^*\left(\sum k_g g\right) = \operatorname{tr}\left(\varphi^*\left(\sum k_g g\right)\right) = \operatorname{tr}\left(\sum k_g \varphi(g)\right)$$
$$= \sum k_g \operatorname{tr}(\varphi(g)) = \sum k_g \chi(g). \tag{6}$$

特别地，有 $\chi^*(g) = \chi(g)$，$\forall\, g \in G$. 因此 χ^* 在 G 上的限制正好是事先给定的 G 的表示 φ 提供的特征标. (6)式说明：G 的 K 表示 φ 的表示空间 V 作为左 $K[G]$-模所提供的特征标 χ^* 可以看成是由 φ 的特征标 χ"线性地"扩充而成，仍记作 χ.

不难看出，两个左 $K[G]$-模 V 和 W 如果同构，则它们提供的特征标相等.

类似于命题 3.1.5，我们有：左 $K[G]$-模的直和 $V_1 \dotplus V_2 \dotplus \cdots \dotplus V_m$ 提供的特征标等于直和项提供的特征标之和.

类似于命题 3.1.6，我们有：如果左 KG-模 M 是它的子模 $M_1, M_2, \cdots, M_s$ 的直和，则 M 提供的特征标等于 $M_i(1 \leqslant i \leqslant s)$ 提供的特征标之和.

习 题 3.1

1. 设 G 是有限群，φ 是 G 的一个复表示，它提供的特征标记作 χ，φ 的逆步表示 φ^* 提供的特征标记作 χ^*. 证明：

(i) $\chi^*(g) = \overline{\chi(g)}, \forall g \in G$；

(ii) $\chi^* = \chi$ 当且仅当对一切 $g \in G$ 都有 $\chi(g)$ 是实数.

2. 设 G 是有限群，域 K 的特征不能整除 $|G|$，设 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_s$ 是 G 的所有不等价的不可约 K-表示，证明：

$$\bigcap_{i=1}^{s} \mathrm{Ker}\varphi_i = \{1\}.$$

（**提示**：考虑 G 的正则 K-表示 ρ 的直和分解以及 ρ 提供的特征标的性质.）

3. 设 χ 是有限群 G 的任一 K-表示 φ 提供的特征标，定义

$$\mathrm{Ker}\chi := \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\}.$$

如果 K 为复数域，证明：

(i) $\mathrm{Ker}\chi = \mathrm{Ker}\varphi$；

(ii) 设 $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_s$ 是 G 的所有不等价的不可约复表示提供的特征标，则 $\bigcap_{i=1}^{s} \mathrm{Ker}\chi_i = \{1\}$.

4. 设 χ 是有限群 G 的 n 次复表示 (φ, V) 提供的特征标，定义

$$Z(\chi) := \left\{ g \in G \,\middle|\, |\chi(g)| = \chi(1) \right\},$$

称 $Z(\chi)$ 是 χ 的**中心**. 证明：

(i) $Z(\chi)$ 是 G 的正规子群，并且 $\mathrm{Ker}\varphi \subset Z(\chi)$；

(ii) $g \in Z(\chi) \Rightarrow g\mathrm{Ker}\varphi \in Z(G/\mathrm{Ker}\varphi)$；

(iii) $Z(\chi)/\mathrm{Ker}\varphi \subseteq Z(G/\mathrm{Ker}\varphi)$，并且 $Z(\chi)/\mathrm{Ker}\varphi$ 是循环群；

(iv) $\chi(1)=1 \Rightarrow Z(\chi)=G$.

（提示：(iii)的后半部分考虑商群 $Z(\chi)/\mathrm{Ker}\varphi$ 的一个复表示 $\psi: g\mathrm{Ker}\varphi \mapsto \varphi(g)$，它是由 φ 诱导的商群 $G/\mathrm{Ker}\varphi$ 的表示在 $Z(\chi)/\mathrm{Ker}\varphi$ 上的限制；由于 $g\in Z(\chi)$，所以 $\varphi(g)$ 是数乘变换，从而又可得到 $Z(\chi)/\mathrm{Ker}\varphi$ 的 1 次复表示，说明它是忠实的，然后利用习题 1.5 的第 6 题的结果.）

5. 设 χ_i 是有限群 G 的任一不可约复表示 (φ_i, V_i) 提供的特征标，证明：

(i) $g\in Z(\chi_i) \Longleftrightarrow g\mathrm{Ker}\varphi_i \in Z(G/\mathrm{Ker}\varphi_i)$；

(ii) $Z(G)\subseteq Z(\chi_i)$；

(iii) $Z(\chi_i)/\mathrm{Ker}\varphi_i = Z(G/\mathrm{Ker}\varphi_i)$，并且 $Z(G/\mathrm{Ker}\varphi_i)$ 是循环群；

(iv) $\chi_i(1)=1 \Longleftrightarrow Z(\chi_i)=G$；

(v) $Z(G)=\bigcap_{i=1}^{s} Z(\chi_i)$，其中 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_s$ 是 G 的所有不等价的不可约复表示 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_s$ 提供的特征标.

（提示：(i)的"$\Leftarrow$"：由 φ_i 可诱导商群 $G/\mathrm{Ker}\varphi_i$ 的复表示 $\tilde{\varphi}_i$ 使得 φ_i 是 $\tilde{\varphi}_i$ 的提升，从而由 φ_i 不可约得 $\tilde{\varphi}_i$ 不可约. 然后利用习题 2.2 的第 7 题.）

§2 不可约特征标的正交关系及其应用

设 G 是有限群，K 是特征不能整除 $|G|$ 的域. 设 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_s$ 是 G 的所有不等价的不可约 K-表示，χ_i 是 φ_i 提供的特征标，$i=1,2,\cdots,s$. 本节的目的是要研究 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_s$ 之间的关系. 为此我们从 G 的正则表示的直和分解式出发.

设左正则 $K[G]$-模 $K[G]$ 到不可约子模的直和分解式为

$$K[G] = L_{11}\oplus\cdots\oplus L_{1m_1}\oplus\cdots\oplus L_{s1}\oplus\cdots\oplus L_{sm_s}, \quad (1)$$

其中 $L_{ij}\cong L_{kl}$ 当且仅当 $i=k$. 令

$$A_i = L_{i1} \oplus L_{i2} \oplus \cdots \oplus L_{im_i}, \quad i = 1,2,\cdots,s, \tag{2}$$

则 A_i 是 $K[G]$的极小双边理想，$1 \leqslant i \leqslant s$；并且有

$$K[G] = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_s. \tag{3}$$

设 $1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_s$，其中 $e_i \in A_i (1 \leqslant i \leqslant s)$，则 $A_i = K[G]e_i (i = 1, 2, \cdots, s)$；并且 $\{e_1, e_2, \cdots, e_s\}$ 是 $K[G]$的全部中心本原幂等元. 令 $D_i = \mathrm{Hom}_{A_i}(L_{i1}, L_{i1})$，并且 $n_i = \dim_{D_i} L_{i1}$. 据推论 2.2.5 知道，$m_i = n_i (i = 1, 2, \cdots, s)$.

因为 G 的每一个不可约 K 表示等价于 G 的正则表示 ρ 的直和分解式中的某一个不可约表示，所以不妨设 φ_i 是 L_{i1} 提供的 $K[G]$的表示 φ_i^* 在 G 上的限制，$i = 1, 2, \cdots, s$. φ_i^* 提供的特征标记作 $\chi_i^* (i = 1, 2, \cdots, s)$. $K[G]$的正则表示 ρ^* 提供的特征标记作 χ^*，G 的正则表示 ρ 提供的特征标记作 χ.

引理 3.2.1 设 G 是有限群，域 K 的特征不能整除 $|G|$，则

$$\chi^*(ge_i) = n_i \chi_i(g), \quad \forall\, g \in G,\ i = 1, 2, \cdots, s. \tag{4}$$

证明 由(1)式得

$$\begin{aligned} \chi^* &= \chi_1^* + \cdots + \chi_1^* + \cdots + \chi_s^* + \cdots + \chi_s^* \\ &= m_1 \chi_1^* + \cdots + m_s \chi_s^* = n_1 \chi_1^* + \cdots + n_s \chi_s^*. \end{aligned} \tag{5}$$

于是对于 $g \in G$，我们有

$$\chi^*(ge_i) = \sum_{j=1}^{s} n_j \chi_j^*(ge_i), \quad i = 1, 2, \cdots, s. \tag{6}$$

当 $j \neq i$ 时，我们已知道有 $A_i A_j = (0)$. 于是对任意 $x \in L_{j1}$，有 $\varphi_j^*(ge_i)x = (ge_i)x = 0$. 所以 $\varphi_j^*(ge_i)$ 是 L_{j1} 上的零变换，从而 $\chi_j^*(ge_i) = \mathrm{tr}(\varphi_j^*(ge_i)) = 0$.

因为 e_i 是 A_i 的单位元，所以对于任意 $x \in L_{i1}$ 有

$$\varphi_i^*(ge_i)x = (ge_i)x = g(e_i x) = gx = \varphi_i(g)x,$$

由此得出 $\varphi_i^*(ge_i) = \varphi_i(g)$. 从而

$$\chi_i^*(ge_i) = \mathrm{tr}(\varphi_i^*(ge_i)) = \mathrm{tr}(\varphi_i(g)) = \chi_i(g).$$

于是(6)式成为

$$\chi^*(ge_i) = n_i \chi_i(g), \quad i = 1, 2, \cdots, s. \quad \blacksquare$$

引理 3.2.2 设 G 是有限群，域 K 的特征不能整除 $|G|$，则

$$e_i = \frac{n_i}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_i(g^{-1})g, \quad i = 1,2,\cdots,s. \tag{7}$$

证明 设 $e_i = \sum\limits_{y\in G} k_y y$. 两边左乘 $g\in G$，得

$$ge_i = \sum_{y\in G} k_y gy = \sum_{x\in G} k_{g^{-1}x} x = \sum_{y\in G} k_{g^{-1}y} y.$$

从而

$$\chi^*(ge_i) = \sum_{y\in G} k_{g^{-1}y}\chi(y). \tag{8}$$

因为 χ 是 G 的正则表示提供的特征标，所以(8)式可变成

$$\chi^*(ge_i) = k_{g^{-1}}\chi(1) = k_{g^{-1}}|G|. \tag{9}$$

又据引理 3.2.1 知

$$\chi^*(ge_i) = n_i\chi_i(g),$$

从而得到 $k_{g^{-1}} = \frac{n_i}{|G|}\chi_i(g), \forall\ g\in G$. 所以

$$e_i = \frac{n_i}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_i(g^{-1})g. \quad \blacksquare$$

推论 3.2.1 设 G 是有限群，K 是特征不能整除 $|G|$ 的域并且使得 $D_i\cong K(i=1,2,\cdots,s)$. 则

$$e_i = \frac{\chi_i(1)}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_i(g^{-1})g, \quad i = 1,2,\cdots,s. \tag{10}$$

证明 此时 $\dim_K L_{i1} = (\dim_K D_i)(\dim_{D_i} L_{i1}) = n_i$，从而 $\chi_i(1) = n_i$. 由引理 3.2.2 即得(10)式. $\blacksquare$

特别地，当 K 是特征不能整除 $|G|$ 的代数闭域时，(10)式成立，这是因为 Schur 引理告诉我们，此时有 $D_i\cong K, i=1,2,\cdots,s$.

定理 3.2.1(第一正交关系) 设 G 是有限群，K 是特征不能整除 $|G|$ 的域并且使得 $D_i\cong K(i=1,2,\cdots,s)$，$D_i$ 的意义见本节开头所述. 设 χ_i 和 χ_j 是 G 的不可约特征标，则

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_i(g)\chi_j(g^{-1}) = \delta_{ij}. \tag{11}$$

证明 仍用本节开头的记号. 因为 e_i 和 e_j 是 $K[G]$ 的中心本

原幂等元，所以 $e_ie_j=\delta_{ij}e_i$. 据推论 3.2.1 得

$$\frac{\chi_i(1)\chi_j(1)}{|G|^2}\sum_{g\in G}\sum_{h\in G}\chi_i(g^{-1})\chi_j(h^{-1})gh = \delta_{ij}\frac{\chi_i(1)}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_i(g^{-1})g.$$

比较上式两边 1 的系数，得到

$$\frac{\chi_i(1)\chi_j(1)}{|G|^2}\sum_{g\in G}\chi_i(g^{-1})\chi_j(g) = \delta_{ij}\frac{\chi_i(1)}{|G|}\chi_i(1).$$

由此即得(11)式. ▌

特别地，当 K 是特征不能整除 $|G|$ 的代数闭域时，(11)式成立.

在定理 3.2.1 的条件下，据定理 2.3.5 知，G 的不等价的不可约 K-表示的数目等于 G 的共轭类的数目. 设 $C_1,C_2,\cdots,C_s$ 是 G 的全部共轭类，$g_1,g_2,\cdots,g_s$ 是它们的代表元，则第一正交关系可以写成

$$\frac{1}{|G|}\sum_{l=1}^{s}|C_l|\chi_i(g_l)\chi_j(g_l^{-1}) = \delta_{ij}. \tag{12}$$

定理 3.2.2(第二正交关系) 条件同定理 3.2.1，设 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_s$ 是 G 的所有不等价的不可约 K-表示提供的特征标，$C_1,C_2,\cdots,C_s$ 是 G 的全部共轭类，g_i 是 C_i 的代表元，$i=1,2,\cdots,s$. 则

$$\sum_{l=1}^{s}\chi_l(g_i^{-1})\chi_l(g_j) = \delta_{ij}|C_G(g_j)|, \tag{13}$$

其中 $C_G(g_j)$是 g_j 在 G 里的中心化子.

证明 令

$$W=\begin{pmatrix}\chi_1(g_1) & \cdots & \chi_1(g_s)\\ \vdots & & \vdots\\ \chi_s(g_1) & \cdots & \chi_s(g_s)\end{pmatrix},\quad W^*=\begin{pmatrix}\chi_1(g_1^{-1}) & \cdots & \chi_s(g_1^{-1})\\ \vdots & & \vdots\\ \chi_1(g_s^{-1}) & \cdots & \chi_s(g_s^{-1})\end{pmatrix},$$

令 $D=\mathrm{diag}(|C_1|,|C_2|,\cdots,|C_s|)$. 则由(12)式得

$$WDW^* \text{ 的}(i,j)\text{ 元} = \sum_{l=1}^{s}\chi_i(g_l)|C_l|\chi_j(g_l^{-1}) = \delta_{ij}|G|.$$

因此 $WDW^*=|G|I$，其中 I 是 s 级单位矩阵. 从而 W,D,W^* 均可逆，并且有

$$W^*WD = W^*WDW^*(W^*)^{-1} = W^*|G|I(W^*)^{-1} = |G|I.$$

由于

$$W^*WD \text{ 的}(i,j)\text{ 元} = \sum_{l=1}^{s}\chi_l(g_i^{-1})\chi_l(g_j)|C_j|,$$

所以

$$\sum_{l=1}^{s}\chi_l(g_i^{-1})\chi_l(g_j) = \delta_{ij}\frac{|G|}{|C_j|} = \delta_{ij}|C_G(g_j)|. \qquad \blacksquare$$

上述矩阵 W 称为 G 的**特征标表**. 通常约定 W 的第一行是 G 的主特征标在 $g_1, g_2, \cdots, g_s$ 上的函数值，从而第一行元素全为 1；约定 $g_1=1$，因此 W 的第 1 列与各个不可约特征标的次数有关. 定理 3.2.2 在证明过程中已指出 W 是可逆矩阵. 从证明过程中还可看出：$WDW^* = |G|I$ 刻画了第一正交关系；$W^*WD = |G|I$ 刻画了第二正交关系，其中 W^*，D 如上所述.

为了简写第一正交关系的公式(11)的左端，我们在函数空间 K^G 中定义一个二元函数如下：对于 $\xi, \eta \in K^G$，规定

$$\langle \xi, \eta \rangle := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\xi(g)\eta(g^{-1}). \tag{14}$$

容易验证这个二元函数是 K^G 上的对称双线性函数. 利用这个对称双线性函数，第一正交关系可以写成

$$\langle \chi_i, \chi_j \rangle = \delta_{ij}. \tag{15}$$

当 K 取为复数域时，第一正交关系的公式(11)成为

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_i(g)\overline{\chi_j(g)} = \delta_{ij}. \tag{16}$$

为了简写(16)式的左端，我们在 C^G 中定义一个二元函数：

$$(\xi, \eta) := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\xi(g)\overline{\eta(g)}. \tag{17}$$

易验证这是复向量空间 C^G 的内积. 如果 η 是 G 的复特征标，则据命题 3.1.13 知，$\eta(g^{-1}) = \overline{\eta(g)}$，从而得：$(\xi, \eta) = \langle \xi, \eta \rangle$. 因此，当 K 为复数域时，第一正交关系也可以写成

$$(\chi_i, \chi_j) = \delta_{ij}. \tag{18}$$

现在利用正交关系研究有限群 G 的表示. 仍设 char$K$ 不能整除 $|G|$, $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_s$ 是 G 的全部不等价的不可约 K-表示, 它们提供的特征标记作 $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_s$.

任给 G 的一个 n 次 K-表示 φ, 据 Maschke 定理, φ 等价于 G 的有限多个不可约 K-表示的直和, 假设其中与 φ_i 等价的有 a_i 个, a_i 是非负整数, 我们写

$$\varphi \approx a_1\varphi_1 \oplus a_2\varphi_2 \oplus \cdots \oplus a_s\varphi_s. \tag{19}$$

我们把 a_i 称为 φ_i 在 φ 中的重数, $i=1,2,\cdots,s$.

命题 3.2.1 设 G 是有限群, K 是特征为 0 的域并且使得 $D_i \cong K(i=1,2,\cdots,s)$, 其中 D_i 的意义见本节开头所述. 设 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_s$ 是 G 的全部不等价的不可约 K-表示. 设 φ 是 G 的任一有限维 K-表示, 则 φ_i 在 φ 中的重数等于 $\langle \chi_\varphi, \chi_i \rangle$, 其中 χ_i 是 φ_i 提供的特征标, $i=1,2,\cdots,s$.

证明 从(19)式得到

$$\chi_\varphi = a_1\chi_1 + a_2\chi_2 + \cdots + a_s\chi_s. \tag{20}$$

由此得出

$$\langle \chi_\varphi, \chi_i \rangle = \sum_{j=1}^{s} a_j \langle \chi_j, \chi_i \rangle = a_i \cdot 1. \tag{21}$$

因为 char$K=0$, 所以可把 $a_i \cdot 1$ 与 a_i 等同, 于是得到

$$a_i = \langle \chi_\varphi, \chi_i \rangle. \quad \blacksquare \tag{22}$$

命题 3.2.1 说明: 不可约表示 φ_i 在 G 的任一表示 φ 中的重数由 φ 和 φ_i 唯一决定, 跟 φ 的直和分解式无关.

定理 3.2.3 设 G 是有限群, K 是特征为 0 的域并且使得 $D_i \cong K$, $i=1,2,\cdots,s$, 其中 D_i 如上述. 设 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_s$ 是 G 的全部不等价的不可约 K-表示. 设 φ, ψ 是 G 的两个有限维 K-表示. 则 $\varphi \approx \psi$ 的充分必要条件是 $\chi_\varphi = \chi_\psi$.

证明 必要性已经证过, 现在证充分性. 设 $\chi_\varphi = \chi_\psi$, 则 $\langle \chi_\varphi, \chi_i \rangle = \langle \chi_\psi, \chi_i \rangle$, $i=1,2,\cdots,s$. 又据命题 3.2.1 得

$$\varphi \approx \langle \chi_\varphi, \chi_1 \rangle \varphi_1 \oplus \cdots \oplus \langle \chi_\varphi, \chi_s \rangle \varphi_s,$$
$$\psi \approx \langle \chi_\psi, \chi_1 \rangle \varphi_1 \oplus \cdots \oplus \langle \chi_\psi, \chi_s \rangle \varphi_s.$$

由此得出：$\varphi \approx \psi$. ▌

定理 3.2.3 中关于域 K 的条件可以减弱，我们有

定理 3.2.4 设 K 是特征为 0 的域，则有限群 G 的两个有限维 K-表示等价的充分必要条件是它们提供的特征标相同.

证明 必要性已证，现在证充分性. 设 φ,ψ 是 G 的两个 K-表示，设 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_s$ 是 G 的所有不等价的不可约 K-表示. 设 $\varphi\approx a_1\varphi_1\oplus a_2\varphi_2\oplus\cdots\oplus a_s\varphi_s$，$\psi\approx b_1\varphi_1\oplus b_2\varphi_2\oplus\cdots\oplus b_s\varphi_s$，其中 a_i,b_i 是非负整数，$i=1,2,\cdots,s$. 设 $\chi_\varphi=\chi_\psi$，我们来证：$a_i=b_i$，$i=1,2,\cdots,s$.

设 φ 的表示空间为 V，它可看成是左 $K[G]$-模. 由于 $K[G]$是半单代数，所以 V 可分解成有限多个不可约子模的直和. 由于 $K[G]$上的每一个不可约左模同构于左正则 $K[G]$模的直和分解式中出现的某一个不可约子模. 因此

$$V \cong a_1 L_{11} \oplus a_2 L_{21} \oplus \cdots \oplus a_s L_{s1}, \tag{23}$$

其中 $L_{i1}(1\leqslant i\leqslant s)$是(1)式中出现的不可约子模. 设$\{e_1,e_2,\cdots,e_s\}$是 $K[G]$的全部中心本原幂等元. 设 V 提供的 $K[G]$的表示为 φ^*，它的特征标记作 χ_φ^*. φ^* 在 G 上的限制就是 φ，χ_φ^* 在 G 上的限制就是 χ_φ，由(23)式得

$$\chi_\varphi^* = a_1\chi_1^* + \cdots + a_s\chi_s^*, \tag{24}$$

其中 χ_i^* 是 L_{i1}提供的 $K[G]$的表示 φ_i^* 的特征标，$i=1,2,\cdots,s$.

当 $j\neq i$ 时，因为 $A_iA_j=(0)$，所以对于任意 $x\in L_{j1}$，有 $\varphi_j^*(e_i)x=e_ix=0$. 这说明 $\varphi_j^*(e_i)$是零变换，因此 $\chi_j^*(e_i)=0$.

因为 e_i 是 A_i 的单位元，所以对于任意 $x\in L_{i1}$，有 $\varphi_i^*(e_i)x=e_ix=x$. 这说明 $\varphi_i^*(e_i)$是 L_{i1}上的恒等变换，因此 $\chi_i^*(e_i)=\dim_K L_{i1}$. 于是从(24)式得出

$$\chi_\varphi^*(e_i) = \sum_{j=1}^{s} a_j\chi_j^*(e_i) = a_i\chi_i^*(e_i) = a_i\dim_K L_{i1},$$
$$i = 1,2,\cdots,s. \tag{25}$$

同理可得

$$\chi_{\psi}^{*}(e_i) = b_i \dim_K L_{i1}, \quad i = 1,2,\cdots,s. \tag{26}$$

因为 χ_{φ}^{*} 由 χ_{φ} 完全决定，所以从 $\chi_{\varphi}=\chi_{\psi}$ 可得出 $\chi_{\varphi}^{*}=\chi_{\psi}^{*}$. 于是从(25)和(26)得到 $a_i=b_i, i=1,2,\cdots,s$. ▌

定理 3.2.4 说明：在特征为 0 的域上，有限群 G 的表示 φ 的特征标 χ_{φ} 决定了 φ 的等价类. 又据命题 3.1.1，当域 K 的特征为 0 时，χ_{φ} 也决定了 φ 的次数.

定理 3.2.4 中条件"$\mathrm{char}K=0$"不能去掉，为此给出下面一个例子：设 G 是任一有限群，$\mathrm{char}K=p\neq 0$. 设 V,W 分别是域 K 上的 p 维，$2p$ 维向量空间. 令 $\varphi: g\mapsto 1_V, \forall g\in G$；令 $\psi: g\mapsto 1_W, \forall g\in G$. 则$(\varphi,V)$，$(\psi,W)$都是 G 的 K 表示. 易看出 $\chi_{\varphi}(g)=p\cdot 1=0$，$\forall g\in G$；$\chi_{\psi}(g)=2p\cdot 1=0, \forall g\in G$. 因此 $\chi_{\varphi}=\chi_{\psi}$. 但是由于 $\dim_K V=p$，$\dim_K W=2p$，所以 φ 与 ψ 不等价. 这个例子也表明：χ_{φ} 无法决定 φ 的次数.

对于 G 的两个不可约 K 表示 φ_i 和 φ_j，则定理 3.2.4 中条件"$\mathrm{char}K=0$"也可以更换成下述条件：

推论 3.2.2 设 G 是有限群，K 是特征不能整除 $|G|$ 的域并且使得$D_i\cong K, i=1,2,\cdots,s$，其中 D_i 的意义如上述. 设 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_s$ 是 G 的所有不等价的不可约 K-表示，χ_i 是 φ_i 提供的特征标，$i=1,2,\cdots,s$. 则 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_s$ 两两不等.

证明 因为 G 的特征标表 W 是可逆矩阵，所以 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_s$ 两两不等. ▌

定理 3.2.5 设 G 是有限群，K 是特征为 0 的域并且使得 $D_i\cong K, i=1,2,\cdots,s$. 设 φ 是 G 的 K-表示，则 φ 不可约当且仅当$\langle\chi_{\varphi},\chi_{\varphi}\rangle=1$.

证明 必要性由第一正交关系立即得到. 现在证充分性. 设 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_s$ 是 G 的所有不相等的不可约特征标，由命题 3.2.1 得到

$$\chi_{\varphi} = \langle\chi_{\varphi},\chi_1\rangle\chi_1 + \cdots + \langle\chi_{\varphi},\chi_s\rangle\chi_s.$$

于是$\langle\chi_\varphi,\chi_\varphi\rangle=\langle\chi_\varphi,\chi_1\rangle^2+\cdots+\langle\chi_\varphi,\chi_s\rangle^2$. 因为$\langle\chi_\varphi,\chi_i\rangle$等于$\varphi_i$在$\varphi$中的重数，把它记作$a_i$. 又由已知$\langle\chi_\varphi,\chi_\varphi\rangle=1$，于是得到$1=a_1^2+a_2^2-\cdots+a_s^2$. 由此得出：存在唯一的$l$使得$a_l=1$，而其余的$a_j=0$, $j\neq l$. 所以$\chi_\varphi=\chi_l$. 据定理 3.2.3 得$\varphi\approx\varphi_l$，即φ不可约. ▌

注 定理 3.2.5 中必要性的条件可换成第一正交关系成立的条件，即K是特征不能整除$|G|$的域并且使得$D_i\cong K(i=1,2,\cdots,s)$. 充分性的条件可减弱成"$K$是特征为 0 的域"即可，详见本节习题第 3 题.

定理 3.2.5 给出了判断一个表示是否不可约的方法.

定理 3.2.6（反演公式） 设G是有限群，K是特征不能整除$|G|$的域并且使得$D_i\cong K(i=1,2,\cdots,s)$. 设$A=\sum\limits_{g\in G}a_g g\in K[G]$，则对一切$g\in G$，有

$$a_g=\frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)}\chi(Ag^{-1})\chi(1),\tag{27}$$

其中$\mathrm{Irr}(G)$表示G的所有不可约特征标组成的集合.

证明 我们有$Ag^{-1}=\sum\limits_{h\in G}a_h hg^{-1}=\sum\limits_{y\in G}a_{yg}y$. 据第二正交关系得

$$\begin{aligned}\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)}\chi(Ag^{-1})\chi(1)&=\sum_{y\in G}a_{yg}\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)}\chi(y)\chi(1)\\&=a_g\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)}\chi(1)^2+\sum_{y\neq 1}a_{yg}\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)}\chi(y)\chi(1)\\&=a_g|G|+\sum_{y\neq 1}a_{yg}\cdot 0=a_g|G|.\end{aligned}$$ ▌

推论 3.2.3 设G是指数为m的有限 abel 群，K是包含本原m次单位根的域. 设$A=\sum\limits_{g\in G}a_g g\in K[G]$，则

$$a_g=\frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)}\chi(A)\chi(g^{-1}),\quad\forall\, g\in G.\tag{28}$$

因此，如果$A,B\in K[G]$使得$\chi(A)=\chi(B)$对一切$\chi\in\mathrm{Irr}(G)$，则$A=B$.

证明 因为K是包含本原m次单位根的域，其中m是 abel

群 G 的指数,所以 G 的每一个不可约表示都是 1 次的,共有 $|G|$ 个 1 次表示,于是 $\sum\limits_{\chi\in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1)^2 = |G|$. 据定理 2.3.6 知,有 $D_i\cong K(i=1,2,\cdots,|G|)$. 因为 χ 是 1 次的,所以对一切 $A,B\in K[G]$ 有 $\chi(AB)=\chi(A)\chi(B)$. 由定理 3.2.6 立即得出推论 3.2.3. ▎

我们知道,群 G 的 K 值特征标是 G 的 K 值类函数,并且知道,G 的所有 K 值类函数组成的集合 $Cf_K(G)$ 是 G 的 K 值函数空间 K^G 的线性子空间. 我们来找 $Cf_K(G)$ 的一个基.

定理 3.2.7 设 G 是有限群,K 是特征不能整除 $|G|$ 的域并且使得 $D_i\cong K,i=1,2,\cdots,s$;$\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_s$ 是 G 的所有不相等的不可约特征标. 则 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_s$ 是 G 的类函数空间 $Cf_K(G)$ 的一个 K-基.

证明 在定理的条件下,据定理 2.3.5 知,G 的共轭类的数目等于 G 的不等价的不可约 K-表示的数目 s. 设 $C_1,C_2,\cdots,C_s$ 是 G 的所有共轭类,$g_1,g_2,\cdots,g_s$ 分别是各个共轭类的代表元. 于是一个类函数 f 完全被它在 $g_1,g_2,\cdots,g_s$ 上的函数值所决定. 因此映射: $f\mapsto(f(g_1),f(g_2),\cdots,f(g_s))$ 是 $Cf_K(G)$ 到 K^s 的双射. 显然此映射保持加法和保持数量乘法,因此它是域 K 上向量空间 $Cf_K(G)$ 到 K^s 上的同构映射. 从而 $\dim_K Cf_K(G)=s$. 由于特征标表 $W=(\chi_i(g_j))$ 是可逆矩阵,因此它的行向量组是线性无关的,从而由上述同构映射知道,$\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_s$ 是线性无关的. 所以 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_s$ 是 $Cf_K(G)$ 的一个 K-基. ▎

本节前面我们已在 G 的复值函数空间 C^G 中定义了一个内积(见公式(17)),从而 C^G 成为一个酉空间. 从第一正交关系知,$\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_s$ 是正交单位向量组,从而由定理 3.2.7 立即得到

推论 3.2.4 有限群 G 的所有不相等的不可约复特征标 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_s$ 是 G 的复值类函数空间 $Cf_C(G)$ 的一个标准正交基. ▎

利用定理 3.2.7,我们可以把有限群 G 的任一类函数表示成 G 的不可约特征标的线性组合. 即,我们有

推论 3.2.5 条件同定理 3.2.7. 则 G 的任一类函数 f 有下述"Fourier 展开"：

$$f=\sum_{i=1}^{s}\langle f,\chi_i\rangle\chi_i, \tag{29}$$

其中 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_s$ 是 G 的所有不相等的不可约特征标.

证明 因为 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_s$ 是 $Cf_K(G)$ 的一个 K-基，所以 $f=\sum_{i=1}^{s}k_i\chi_i$，其中 $k_i\in K, i=1,2,\cdots,s$. 从而据第一正交关系得

$$\langle f,\chi_j\rangle=\langle\sum_{i=1}^{s}k_i\chi_i,\chi_j\rangle=\sum_{i=1}^{s}k_i\langle\chi_i,\chi_j\rangle=k_j,\quad j=1,2,\cdots,s.$$

由此即得(29)式. ▌

G 的特征标一定是 G 的类函数；反过来，G 的类函数应当具有什么性质才能成为 G 的特征标呢？下面的定理回答了这一问题.

定理 3.2.8 设 G 是有限群，K 是特征不能整除 $|G|$ 的域. 则 G 的 K 值类函数 f 是 G 的特征标的充分必要条件是，f 是 G 的不可约特征标的非负整系数线性组合.

证明 充分性由命题 3.1.7 立即得到. 现在证必要性：设 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_s$ 是 G 的所有不等价的不可约 K-表示，χ_i 是 φ_i 的特征标，$i=1,2,\cdots,s$. 因为域 K 的特征不能整除 $|G|$，所以 G 的每一个 K-表示是完全可约的. 设 G 的类函数 f 是 G 的特征标，设 f 是由 G 的 K-表示 φ 提供的. 则

$$\varphi\approx a_1\varphi_1\oplus a_2\varphi_2\oplus\cdots\oplus a_s\varphi_s,\ a_i(i=1,2,\cdots,s)\text{ 是非负整数.}$$

从而 $f=a_1\chi_1+a_2\chi_2+\cdots+a_s\chi_s$. ▌

定义 1 设 G 是有限群，K 是特征不能整除 $|G|$ 的域. G 的 K 值函数 f 称为**广义特征标**，如果 f 是 G 的不可约特征标的整系数线性组合.

显然，G 的广义特征标是 G 的类函数.

习 题 3.2

1. 设 G 是有限群，K 是特征不能整除 $|G|$ 的域并且使得 $D_i\cong$

K，$i=1,2,\cdots,s$，其中 D_i 如本节开头所述．$\{e_1,e_2,\cdots,e_s\}$ 是 $K[G]$ 的全部中心本原幂等元．设 $C_1,C_2,\cdots,C_s$ 是 G 的全部共轭类，g_i 是 C_i 的代表元，c_i 是 C_i 的类和，$i=1,2,\cdots,s$．证明：

$$c_i = |C_i|\sum_{j=1}^{s}\frac{\chi_j(g_i)}{\chi_j(1)}e_j,\quad i=1,2,\cdots,s.$$

（提示：据定理 2.3.5 知，$e_1,e_2,\cdots,e_s$ 是 $Z(K[G])$ 的一个 K-基，从而 $c_i = \sum_{j=1}^{s}k_{ij}e_j$．采用本节开头的记号，计算 $\chi_l^*(c_i)$ 可求得 k_{il}，注意利用(10)式说明 $\mathrm{char}K\nmid\chi_l(1)$，$l=1,2,\cdots,s$．）

2．设 G 是有限群，域 K 的特征不能整除 $|G|$．设 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_s$ 是 G 的所有不等价的不可约 K-表示，φ_i 提供的特征标为 $\chi_i(i=1,2,\cdots,s)$．令 $d_i=\dim_K D_i(i=1,2,\cdots,s)$．其余记号如本节开头所述．证明：

$$\langle\chi_i,\chi_j\rangle = \delta_{ij}d_i,\quad 1\leqslant i,j\leqslant s.$$

（提示：类似于第一正交关系的证明方法．）

3．设域 K 的特征为 0，设 φ 是有限群 G 的 K-表示，它提供的特征标记作 χ_φ．证明：如果 $\langle\chi_\varphi,\chi_\varphi\rangle=1$，则 φ 不可约．

（提示：利用第 2 题的结果，并且注意 $\mathrm{char}K=0$．）

4．利用第 1 题和引理 3.2.2 给出第二正交关系的另一种证法．

5．设域 K 包含一个本原 n 次单位根 ξ，证明 n 阶循环群 $G=\langle a\rangle$ 的任一 K 值函数 f 有如下的展开式：

$$f(a^r) = \sum_{j=0}^{n-1}k_j\xi^{rj},$$

其中系数 k_j 按下述公式计算：

$$k_j = \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1}f(a^r)\xi^{-jr}.$$

§3 特征标表，双传递置换表示

在上一节我们指出：设 G 是有限群，K 是特征不能整除 $|G|$

的域并且使得 $D_i \cong K, i=1,2,\cdots,s$；设 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_s$ 是 G 的所有互不相等的不可约特征标，$C_1,C_2,\cdots,C_s$ 是 G 的所有共轭类，g_i 是 C_i 的一个代表元，$i=1,2,\cdots,s$. 则 s 级矩阵 $W=(\chi_i(g_j))$ 称为 G 的**特征标表**，W 是一个可逆矩阵. 通常约定 W 的第一行是 G 的主特征标在 $g_1,g_2,\cdots,g_s$ 上的函数值；并且约定 $g_1=1$，于是 W 的第 1 列中元素分别是 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_s$ 的次数(当域 K 的特征为 0 时).

一般地，设 G 是有限群，K 是特征不能整除 $|G|$ 的域. 设 χ_1，$\chi_2,\cdots,\chi_s$ 是 G 的所有互不相等的不可约特征标，其中 χ_1 是 G 的主特征标；设 $\{g_1=1,g_2,g_3,\cdots,g_r\}$ 是 G 的共轭类的代表元系. 则 $s\times r$ 矩阵 $W=(\chi_i(g_j))$ 称为 G 的**特征标表**. 据定理 2.3.4 知，$s\leqslant r$.

从定理 3.2.4 知道，在特征为 0 的域上，有限群 G 的两个表示等价当且仅当它们提供的特征标相等. 因此，G 的特征标表决定了 G 的所有不可约表示的等价类(当域的特征为 0 时). 求出给定群的特征标表是群表示论的重要课题. 从本节起，我们将陆续介绍求群的特征标表的一些方法.

有限群 G 的 1 次表示提供的特征标称为**线性特征标**. 显然 1 次表示 φ 提供的特征标 χ_φ 可以与 φ 等同，因此求 G 的所有线性特征标就是求 G 的所有 1 次表示，而 G 的 1 次表示都可以从商群 G/G' 的 1 次表示提升得到.

群 G 的非线性不可约特征标的求法需要具体问题具体分析. 有时可以先求出 G 的次数大于 1 的不可约表示，进而得到非线性不可约特征标；有时也可以不求不可约表示，而利用不可约特征标的正交关系等求出非线性不可约特征标.

下面我们举几个例子.

例 3.3.1 求二面体群 $D_6=\langle a,b\mid a^6=1,b^2=1,bab^{-1}=a^{-1}\rangle$ 的实特征标表.

解 易求出 D_6 的中心 $Z(D_6)=\{1,a^3\}$，从而可求出 D_6 的共轭类有 6 个，其代表元为：$1,a,a^2,a^3,b,ab$. 因此 D_6 的不等价的不可约实表示的数目 $s\leqslant 6$.

因为 $ba^2b^{-1}=a^{-2}=a^4\in\langle a^2\rangle$，所以 $\langle a^2\rangle\lhd D_6$. 因为 $D_6/\langle a^2\rangle$ 的阶为 4，所以它是 abel 群，从而 $\langle a^2\rangle\supseteq D_6'$. 由于 $a^2=aba^{-1}b^{-1}$，因此 $\langle a^2\rangle\subseteq D_6'$. 由此得出 $D_6'=\langle a^2\rangle$. 因为 $\langle a^2\rangle$ 在 D_6 中的 4 个陪集为 $\langle a^2\rangle,\langle a^2\rangle a,\langle a^2\rangle b,\langle a^2\rangle ab$，并且后面三个是 $D_6/\langle a^2\rangle$ 中的 2 阶元，所以 $D_6/\langle a^2\rangle$ 的指数为 2，即，$D_6/\langle a^2\rangle$ 是 Klein 四元群. 由于实数域包含本原 2 次单位根 -1，因此 $D_6/\langle a^2\rangle$ 有 4 个 1 次实表示，把它们提升便得到 D_6 的 4 个 1 次实表示：$\chi_1,\chi_2,\chi_3,\chi_4$.

D_6 同构于正六边形的对称群 $G=\langle\alpha,\beta\mid\alpha^6=1,\beta^2=1,\beta\alpha\beta^{-1}=\alpha^{-1}\rangle$，其中 α 是绕正六边形的中心 O 的转角为 $\frac{2\pi}{6}$ 的旋转，β 是关于 O 和一个顶点的连线的反射. 令

$$\varphi_5:\ a\mapsto\alpha,\quad b\mapsto\beta,$$

则 φ_5 是 D_6 到 G 上的一个同构映射，从而 φ_5 是 D_6 的一个忠实的 2 次实表示. 据例 1.3.4 知，φ_5 不可约. φ_5 提供的矩阵表示 Φ_5 为：

$$\Phi_5(a)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\qquad \Phi_5(b)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

令 $\varphi_6:\ a\mapsto\alpha^2,b\mapsto\beta$，则 φ_6 也是 D_6 的一个 2 次不可约实表示. φ_6 提供的矩阵表示为

$$\Phi_6(a)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix},\qquad \Phi_6(b)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

设 φ_5,φ_6 提供的特征标分别为 χ_5,χ_6. 因为

$$\chi_5(a)=1,\qquad \chi_6(a)=-1,$$

所以 $\chi_5\neq\chi_6$. 因此 φ_5 与 φ_6 不等价.

我们已经求出了 D_6 的 6 个不等价的不可约实表示，于是可写出 D_6 的实特征标表如下：

	1	a	a^2	a^3	b	ab
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	-1	1
χ_5	2	1	-1	-2	0	0
χ_6	2	-1	-1	2	0	0

例 3.3.2 求交错群 A_4 的复特征标表.

解 A_4 的共轭类有 4 个，其代表元为：(1)，(12)(34)，(123)，(132). 因此 A_4 有 4 个不等价的不可约复表示.

因为 $A_4'=\{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$，所以 A_4 有 3 个 1 次复表示，它们可从 3 阶循环群 A_4/A_4' 的 1 次复表示提升得到.

因为 $|A_4|=1^2+1^2+1^2+l_4^2$，所以 $l_4=3$. 利用第二正交关系可以求出 χ_4，从而可完成 A_4 的复特征标表如下：

	(1)	(12)(34)	(123)	(132)
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	ω	ω^2
χ_3	1	1	ω^2	ω
χ_4	3	-1	0	0

其中 $\omega=\dfrac{1}{2}(-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})$.

A_4 的 3 次不可约特征标 χ_4 还可以用另一种方法很快写出，这就是利用下面将介绍的 n 次双传递置换表示包含一个 $n-1$ 次不可约表示的定理.

我们首先复习一下群 G 在集合 Ω 上作用的基本概念和基本公式.

设群 G 在集合 Ω 上有一个作用，对于 $x\in\Omega$，令

$$G(x) = \{y \in \Omega \mid \text{存在}\, g \in G,\text{使得}\, y = gx\},$$

称 $G(x)$是 x 的 G-轨道. 令

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\},$$

则 G_x 是 G 的子群，称 G_x 是 x 的**稳定子群**.

在抽象代数课程里已讲过：若有限群 G 在有限集合 Ω 上有一个作用，则对于任意 $x \in \Omega$，有

$$|G| = |G_x| \cdot |G(x)|; \tag{1}$$

并且若 $y \in G(x)$，则 $|G_y| = |G_x|$，$G_y = hG_xh^{-1}$，其中 h 使得 $y = hx$.

引理 3.3.1（**Burnside 引理**） 设有限群 G 在有限集合 Ω 上有一个作用，设 Ω 被划分成 r 条轨道，用 $F(g)$表示 g 的不动点集，即，$F(g) := \{x \in \Omega \mid gx = x\}$. 则

$$r = |G|^{-1} \sum_{g \in G} |F(g)|. \tag{2}$$

证明 考虑 $G \times \Omega$ 的如下子集：

$$S = \{(g,x) \in G \times \Omega \mid gx = x\}.$$

给定 $g \in G$，$S(g,\cdot) := \{x \in \Omega \mid (g,x) \in S\} = \{x \in \Omega \mid gx = x\} = F(g)$.

另一方面，给定 $x \in \Omega$，有

$$S(\cdot,x) := \{g \in G \mid (g,x) \in S\} = \{g \in G \mid gx = x\} = G_x.$$

因为 $\sum_{g \in G} |S(g,\cdot)| = |S| = \sum_{x \in \Omega} |S(\cdot,x)|$，所以

$$\sum_{g \in G} |F(g)| = \sum_{x \in \Omega} |G_x| = \sum_{i=1}^{r} |G(x_i)| \cdot |G_{x_i}|$$
$$= \sum_{i=1}^{r} |G| = r \cdot |G|,$$

其中 $\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$是 Ω 的 r 条轨道的代表元系. 由上式即得所要求的(2)式. ▌

命题 3.3.1 设群 G 在集合 $\Omega = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$上有一个作用，由这个作用引起的 G 在域 K 上的 n 次置换表示记作 φ，则

$$\chi_\varphi(g) = |F(g)| \cdot 1, \quad \forall\, g \in G. \tag{3}$$

证明 因为 $\varphi(g)x_i=gx_i, i=1,2,\cdots,n$，所以

$$\Phi(g)\text{ 的}(i,i)\text{ 元}=\begin{cases}1, & \text{当 } gx_i=x_i,\\ 0, & \text{当 } gx_i\neq x_i.\end{cases}$$

于是，$\chi_\varphi(g)=\mathrm{tr}(\Phi(g))=|F(g)|\cdot 1$. ▌

推论 3.3.1 设 K 是特征为 0 的域，设有限群 G 在有限集合 Ω 上有一个作用，由这个作用引起的 G 在 K 上的置换表示记作 φ，G 的主特征标记作 χ_0. 则 G 在 Ω 上的这个作用使 Ω 划分成的轨道的数目 r 等于 $\langle\chi_\varphi,\chi_0\rangle$.

证明 因为域 K 的特征为 0，所以 $|F(g)|\cdot 1$ 可与 $|F(g)|$ 等同. 由 Burnside 引理和命题 3.3.1 得

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|F(g)| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\varphi(g) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\varphi(g)\chi_0(g^{-1}) = \langle\chi_\varphi,\chi_0\rangle. \end{aligned}$$ ▌

由推论 3.3.1 和命题 3.2.1 立即得到

推论 3.3.2 设 G 是有限群，K 是特征为 0 的域并且使得 $D_i\cong K$ $(i=1,2,\cdots,s)$，其中 D_i 的意义见本章 §2 开头所述. 设 G 在有限集合 Ω 上有一个作用，引起的置换表示记作 φ. 则 Ω 被划分成的轨道的数目 r 等于 G 的主表示 φ_0 在 φ 中的重数. ▌

群 G 在集合 Ω 上的作用称为**传递的**，如果对于任意的 $x,y\in\Omega$，都有 G 中一个元素 g 使得 $gx=y$.

容易看出，G 在 Ω 上的作用是传递的当且仅当 Ω 在 G 的作用下仅有 1 条轨道. 于是在推论 3.3.2 的条件下，G 的主表示 φ_0 在 G 的传递置换表示 φ 中的重数等于 1.

群 G 在集合 Ω 上的作用称为**双传递的**，如果对于任意两个有序二元组 $(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in\Omega\times\Omega$，都存在 G 中一个元素 g 使得 $gx_1=y_1$ 并且 $gx_2=y_2$.

显然，若 G 在 Ω 上的作用是双传递的，则 G 的这个作用也是传递的；并且对于每一个 $x\in\Omega$，稳定子群 G_x 在 $\Omega\backslash\{x\}$ 上的作用是

传递的，从而 G_x 在 Ω 上的作用把 Ω 划分成两条轨道：$\{x\}$ 和 $\Omega\setminus\{x\}$.

定理 3.3.1 如果有限群 G 双传递地作用在有限集合 Ω 上，设 $F(g)=\{x\in\Omega \mid gx=x\}$，则

$$\sum_{g\in G}|F(g)|^2 = 2|G|. \tag{4}$$

证明 因为 $G_x(x\in\Omega)$ 在 $\Omega\setminus\{x\}$ 上的作用是传递的，所以

$$\sum_{g\in G_x}|F_1(g)| = |G_x| = \frac{|G|}{|\Omega|}, \tag{5}$$

其中 $F_1(g) := \{y\in\Omega\setminus\{x\} \mid gy=y\}$，这里 $g\in G_x$. 显然，对于 $g\in G_x$，有 $|F(g)|=1+|F_1(g)|$. 于是得到

$$\sum_{g\in G_x}|F(g)| = \sum_{g\in G_x}(1+|F_1(g)|) = 2|G_x| = 2\frac{|G|}{|\Omega|}. \tag{6}$$

(6)式对于任意 $x\in\Omega$ 都成立. (6)式中让 x 跑遍 Ω 中元素，求和得

$$\sum_{x\in\Omega}\sum_{g\in G_x}|F(g)| = 2|G|. \tag{7}$$

任给 $h\in G$，如果 $h\notin\bigcup_{x\in\Omega}G_x$，则 h 没有不动点，从而 $|F(h)|=0$. 如果 $h\in\bigcup_{x\in\Omega}G_x$，因为 h 有 $|F(h)|$ 个不动点，所以 h 属于 $|F(h)|$ 个稳定子群里，从而(7)式左边中项 $|F(h)|$ 出现了 $|F(h)|$ 次. 于是(7)式左边为

$$\sum_{x\in\Omega}\sum_{g\in G_x}|F(g)| = \sum_{h\in\bigcup_{x\in\Omega}G_x}|F(h)|^2 = \sum_{h\in G}|F(h)|^2.$$

由此即得 $\sum_{h\in G}|F(h)|^2 = 2|G|$. ▌

我们在第一章命题 1.3.2 中指出：若域 K 的特征不能整除 n，则对称群 S_n 在 K 上的 n 次置换表示等价于主表示与一个 $n-1$ 次不可约表示的直和. 现在我们来证明：双传递置换群也有类似的性质.

定理 3.3.2 设 K 是特征为 0 的域，如果有限群 G 在 K 上有一个 n 次双传递置换表示 φ，则 φ 等价于主表示与 G 的一个 $n-1$

次不可约表示 ψ 的直和，并且

$$\chi_\psi(g) = |F(g)| - 1, \quad \forall\, g \in G. \tag{8}$$

证明 设 φ 是由 G 在 n 元集合 $\Omega=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上的一个双传递作用引起的置换表示，其表示空间为

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^{n} k_i x_i \,\middle|\, k_i \in K, i = 1,2,\cdots,n \right\}.$$

令 $V_1 = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \right\rangle, V_2 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} k_i x_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} k_i = 0 \right\}$. 显然，$V_1$ 与 V_2 都是 V 的 G 不变子空间. 因为域 K 的特征不能整除 n，所以 $V=V_1\oplus V_2$. 把 φ 在 V_1,V_2 上的子表示分别记作 φ_1,ψ，则 $\varphi\approx\varphi_1\oplus\psi$. 因为 $\dim_K V_1=1$，所以 φ_1 是 1 次表示. 又因为 $\varphi_1(g)\left(k\sum x_i\right) = k\sum g x_i = k\sum x_i$，所以 $\varphi_1(g)=1_{V_1}, \forall\, g\in G$. 从而 φ_1 是 G 的主表示. 显然 ψ 的次数为 $n-1$. 下面来证 ψ 是不可约表示. 因为 G 在 Ω 上的作用是双传递的，所以(4)式成立. 从而

$$\begin{aligned}
\langle \chi_\varphi, \chi_\varphi \rangle &= |G|^{-1} \sum_{g\in G} \chi_\varphi(g)\chi_\varphi(g^{-1}) \\
&= |G|^{-1} \sum_{g\in G} |F(g)| \cdot |F(g^{-1})| \\
&= |G|^{-1} \sum_{g\in G} |F(g)|^2 = |G|^{-1} 2 |G| = 2,
\end{aligned} \tag{9}$$

其中第三个等号利用了事实：$|F(g^{-1})|=|F(g)|$（这从 g 的轮换分解式可看出）. 设 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_s$ 是 G 的所有不等价的不可约 K-表示，它们提供的特征标分别为 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_s$. 设

$$\varphi = a_1\varphi_1 \oplus a_2\varphi_2 \oplus \cdots \oplus a_s\varphi_s,$$

则

$$\langle \chi_\varphi, \chi_\varphi \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{s} a_i\chi_i, \sum_{j=1}^{s} a_j\chi_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} a_i a_j \langle \chi_i, \chi_j \rangle.$$

据习题 3.2 的第 2 题知，$\langle\chi_i,\chi_j\rangle=\delta_{ij}d_i$，其中 $d_i=\dim_K D_i$，D_i 的意义见本章 §2 开头所述. 于是得到

$$\langle \chi_\varphi, \chi_\varphi \rangle = \sum_{i=1}^{s} a_i^2 d_i. \tag{10}$$

因为 φ_1 在 φ 中出现并且 $d_1=1$，所以(10)式右边中 $a_1\neq 0$ 并且 $a_1^2d_1=a_1^2$. 据(9)式和(10)式得 $a_1=1$ 并且存在某个 j 使得 $a_j=1$，而其余 $a_i=0$. 因此 $\varphi\approx\varphi_1\oplus\varphi_j$. 从而

$$\varphi_1\oplus\varphi_j\approx\varphi_1\oplus\psi.$$

由此得出，$\chi_1+\chi_j=\chi_1+\chi_\psi$，所以 $\chi_j=\chi_\psi$. 由于域 K 的特征为 0，据定理 3.2.4 得，$\varphi_j=\psi$. 因此 ψ 不可约.

由 $\varphi\approx\varphi_1\oplus\psi$ 得，$\chi_\varphi=\chi_1+\chi_\psi$. 因此

$$\chi_\psi(g)=\chi_\varphi(g)-\chi_1(g)=|F(g)|-1,\quad \forall\, g\in G.$$ ▌

推论 3.3.3 当 $n>3$ 时，交错群 A_n 在特征为 0 的域 K 上有一个 $n-1$ 次不可约表示 ψ，并且

$$\chi_\psi(g)=|F(g)|-1,\quad \forall\, g\in A_n. \tag{11}$$

证明 不难看出，$n>3$ 时，A_n 是双传递置换群，并且 A_4 自然地作用在 n 元集合 Ω 上. 由定理 3.3.2 即得结论. ▌

根据推论 3.3.3，A_4 有一个 3 次不可约复表示，它提供的特征标利用公式(11)可以立即写出，它就是上述的 χ_4.

***例 3.3.3** 求 A_4 在有理数域上的特征标表.

解 A_4 在有理数域上的不等价的不可约表示的数目 s 不超过 A_4 的共轭类的数目 4.

因为 $A_4'=\{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$，所以 A_4/A_4' 是 3 阶循环群. 由于有理数域不包含本原 3 次单位根，因此 3 阶循环群 A_4/A_4' 的 1 次表示只有主表示，从而 A_4 的 1 次表示只有主表示 χ_1. 据例 2.3.4，3 阶循环群 $\langle a\rangle$ 有一个 2 次不可约表示 φ，它提供的矩阵表示 Φ 为

$$\Phi(a)=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\end{pmatrix},\qquad \Phi(a^2)=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}.$$

把 A_4/A_4' 的这个 2 次不可约表示提升便得到 A_4 的 2 次不可约表示，进而可求出这个表示提供的特征标.

根据推论 3.3.3，可以立即写出 A_4 的一个 3 次不可约特征标.

现在我们把已经求出的 A_4 的三个不可约特征标列成表如下：

	(1)	(12)(34)	(123)	(132)
χ_1	1	1	1	1
χ_2	2	2	-1	-1
χ_3	3	-1	0	0

A_4 在有理数域上还有没有第 4 个不可约特征标？我们来分析这个问题. 据习题 3.2 的第 2 题，$\langle\chi_i,\chi_j\rangle=\delta_{ij}d_i$，其中 $d_i=\dim_K D_i=\frac{l_i}{m_i}$，$1\leqslant i\leqslant s$. 运用这个结论到本题上，计算

$$\langle\chi_1,\chi_1\rangle=\frac{1}{|A_4|}\sum_{l=1}^{4}|C_l|\chi_1(g_l)\chi_1(g_l^{-1})=\frac{1}{12}[1+3+4+4]=1,$$

由此得出 $m_1=1$；计算

$$\langle\chi_2,\chi_2\rangle=\frac{1}{12}[4+12+4(-1)(-1)+4(-1)(-1)]=2,$$

由此得出 $m_2=1$；计算 $\langle\chi_3,\chi_3\rangle=\frac{1}{12}[9+3(-1)(-1)+0+0]=1$，由此得出 $m_3=3$. 现在 $l_1m_1+l_2m_2+l_3m_3=1+2+9=12=|A_4|$，据定理 2.3.6 的(i)知，$A_4$ 在有理数域上的不等价的不可约表示只有上述三个，因此上面列出的表就是 A_4 在有理数域上的特征标表.

类似于例 3.3.3，我们可以求出 A_4 的实特征标表，它与 A_4 在有理数域上的特征标表一样. 于是 A_4 有唯一的 3 次不可约实特征标 χ_3，从特征标表的构造过程知道，χ_3 是 A_4 作为双传递置换群利用推论 3.3.3 得到的. 另一方面我们又知道，A_4 同构于正四面体的旋转对称群，这个同构映射给出了 A_4 的一个 3 次不可约实表示，它也提供一个 3 次不可约特征标. 由于 A_4 的 3 次不可约特征标只有一个，因此 A_4 的由正四面体的旋转对称群给出的表示等价于 A_4 的双传递置换表示的不可约成分 ϕ.

下面的定理 3.3.3 给出了特征标表 $W_{s\times r}$ 的秩.

*__定理 3.3.3__ 设 K 是特征为 0 的域，则有限群 G 的特征标表的秩等于 G 的所有不等价的不可约 K-表示的数目，从而 G 的所有不相等的不可约特征标 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_s$ 是 K-线性无关的.

证明 设 $W=(\chi_i(g_j))_{s\times r}$，其中 $g_1,g_2,\cdots,g_r$ 是 G 的共轭类的代表元素系. 设 $W^*=(\chi_j(g_i^{-1}))$，W^* 是 $r\times s$ 矩阵. 设 $C_1,C_2,\cdots,C_r$ 是 G 的全部共轭类，令 $D=\mathrm{diag}(|C_1|,|C_2|,\cdots,|C_r|)$. 采用上一节开头的记号，即，$D_i=\mathrm{Hom}_{A_i}(L_{i1},L_{i1})\ (i=1,2,\cdots,s)$. 令 $d_i=\dim_K D_i\ (i=1,2,\cdots,s)$. 据习题 3.2 的第 2 题的结论，我们得到

$$WDW^* \text{ 的}(i,j)\text{ 元} = \sum_{l=1}^{r}\chi_i(g_l)|C_l|\chi_j(g_l^{-1}) = \delta_{ij}d_i|G|.$$

因此，$WDW^*=\mathrm{diag}(|G|d_1,|G|d_2,\cdots,|G|d_s)$. 从而 WDW^* 的行列式 $|WDW^*|=|G|^s d_1\cdots d_s\neq 0$. 又据线性代数的 Binet-Cauchy 公式，$|WDW^*|$ 等于 W 的 s 级子式与 DW^* 的相应的 s 级子式的乘积之和. 因此 W 至少有一个 s 级子式不等于零，从而 W 的秩等于 s. 由于 $Cf_K(G)\cong K^r$，所以 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_s$ 线性无关. ▌

习 题 3.3

1. 求二面体群 $D_7=\langle a,b\,|\,a^7=b^2=1,bab^{-1}=a^{-1}\rangle$ 的实特征标表.

2. 求下列群的复特征标表：

(1) 二面体群 D_4；　　(2) 四元数群 G.

3. 求对称群 S_4 的实特征标表.

4. 求 A_5 的一个 4 次不可约实表示及其特征标.

5. 设有限群 G 传递地作用在有限集合 Ω 上，对于 $x\in\Omega$，Ω 在 G_x 的作用下被划分成的轨道的条数记作 $r(x)$，利用 Burnside 引理和组合计数原理可以证明：

$$r(x) = |G|^{-1}\sum_{g\in G}|F(g)|^2,$$

其中 $F(g)$ 是 g 的不动点集. 利用这个结论证明：若有限群 G 在有限集合 Ω 上有一个传递的作用，此作用引起的 G 在特征为 0 的域 K 上的置换表示记作 φ，则对于 $x\in\Omega$，G_x 在 Ω 上作用的轨道的数目 $r(x)$ 等于 $\langle\chi_\varphi,\chi_\varphi\rangle$.

6. 设 H 和 N 是两个群,并且存在 H 到 $\mathrm{Aut}(N)$的一个同态 $\sigma: h \mapsto \sigma(h)$. 把 $\sigma(h)$ 记成 σ_h. 考虑集合

$$G = \{(h,y) \mid h \in H, y \in N\},$$

在 G 中规定乘法运算如下:

$$(h_1,y_1)\cdot(h_2,y_2)=(h_1h_2, y_1\cdot\sigma_{h_1}(y_2)).$$

(1) 验证 G 对于上述乘法成一群,称此群是群 H 与 N 的半直积,记作 $G=H\ltimes N$;

(2) 令 $H^*=\{(h,1)\mid h\in H\}$, $N^*=\{(1,y)\mid y\in N\}$,证明: $H^*\cong H, N^*\cong N$; $H^*<G, N^*\lhd G, H^*\cap N^*=\{(1,1)\}, H^*N^*=G$;

(3) 若把$(h,1)$与 h 等同,把$(1,y)$与 y 等同,则有 $hyh^{-1}=\sigma_h(y)$,这表明由同态 σ 引起的 H 在 N 上的作用是共轭作用.

7. 设 G 是 3 阶群 $H=\langle b\rangle$与 7 阶群 $N=\langle a\rangle$的半直积,其中 H 到 $\mathrm{Aut}(N)$的同态 σ 满足 $\sigma_b(a)=a^2$. 若把$(h,1)$与 h 等同,把$(1,y)$与 y 等同,则 H 可看成 G 的子群,N 可看成 G 的正规子群,并且

$$G = \langle a,b \mid a^7=1, b^3=1, bab^{-1}=a^2\rangle.$$

求 G 的复特征标表.

*8. 群 G 的一个复表示 φ 提供的特征标 χ 如果对一切 $g\in G$ 都有 $\chi(g)$是实数,则称 χ 是 G 的**实值特征标**. 设 C 是 G 的一个共轭类,设 $g\in C$,把 g^{-1}所属的共轭类记作 C^{-1},若 $C^{-1}=C$,则称 C 是 G 的**实共轭类**.

证明:有限群 G 在复数域上的实值不可约特征标的数目等于 G 的实共轭类的数目.

(**提示**:设 W 是 G 的复特征标表. G 的不可约特征标 χ 的逆步特征标记作 χ^*,易证 $\chi^*=\chi$ 当且仅当 χ 是实值特征标. 把 W 中每一个不可约特征标 χ_i 与它的逆步特征标 χ_i^* 对换,其效果为对 W 的行做了一个置换,相应的置换矩阵记作 P,易看出 $\mathrm{tr}(P)$是 W 的不动行的数目,亦即 G 的实值特征标的数目. 类似地,把 W 中

每一个共轭类 C 与 C^{-1} 对换，其效果为对 W 的列作了一个置换，相应的置换矩阵记作 Q，易看出 $\mathrm{tr}(Q)$ 是 W 的不动列的数目，亦即 G 的实共轭类的数目. 去证 $PW=WQ$.）

*9. 证明：有限群 G 在复数域上存在非主特征标的实值不可约特征标当且仅当 G 的阶为偶数.

（**提示**：充分性：若 $|G|$ 为偶数，则 G 有 2 阶元，从而 G 至少有两个实共轭类. 必要性：用反证法，假如 $|G|$ 为奇数，设 C 是 G 的实共轭类，任取 $g\in C$，因为 $g^{-1}\in C$，所以存在 $x\in G$ 使得 $xgx^{-1}=g^{-1}$. 去证 $x^2\in C_G(g)$. 由于 $|G|$ 为奇数，所以 x^2 与 x 同阶，从而 $\langle x^2\rangle=\langle x\rangle$，于是 $x\in\langle x^2\rangle\subset C_G(g)$. 由此去证 $g=1$.）

§4 从特征标表看群的一些性质

群 G 的特征标表包含了有关 G 的结构的大量信息，我们要学会如何从 G 的特征标表看出 G 的一些性质.

4.1 从群 G 的特征标表可以求出 G 的全部正规子群

定理 3.4.1 设 N 是有限群 G 的正规子群，设域 K 的特征不能整除 $|G|$，设 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_s$ 是 G 的所有不等价的不可约 K-表示，则 N 是若干个 $\mathrm{Ker}\varphi_i$ 的交.

证明 考虑商群 G/N 的正则表示 $\tilde{\rho}$ 的提升 φ，我们有 $\varphi(g)=\tilde{\rho}(gN)$，$\forall\ g\in G$. 从第一章 §2 我们知道：$N\subseteq\mathrm{Ker}\varphi$. 现在我们进一步证明 $N=\mathrm{Ker}\varphi$；设 V 是 $\tilde{\rho}$ 的表示空间，则

$$g\in\mathrm{Ker}\varphi\Longleftrightarrow\varphi(g)=1_V\Longleftrightarrow\tilde{\rho}(gN)=1_V\Longleftrightarrow gN\in\mathrm{Ker}\tilde{\rho}.$$

因为正则表示 $\tilde{\rho}$ 是忠实的，所以 $gN\in\mathrm{Ker}\tilde{\rho}\Longleftrightarrow gN=N\Longleftrightarrow g\in N$. 这就证明了 $N=\mathrm{Ker}\varphi$.

因为域 K 的特征不能整除 $|G|$，所以可设 $\varphi\approx m_1\varphi_1\oplus m_2\varphi_2\oplus\cdots\oplus m_s\varphi_s$，其中 $m_i\geqslant0(i=1,2,\cdots,s)$. 如果 $m_i=0$ 的项不写出，则可设 $\varphi\approx m_{r_1}\varphi_{r_1}\oplus m_{r_2}\varphi_{r_2}\oplus\cdots\oplus m_{r_t}\varphi_{r_t}$，其中 $m_{r_i}>0(i=1,2,\cdots,t)$. 于是

相应的矩阵表示满足下述关系：对任意 $g\in G$，有

$$S\Phi(g)S^{-1}=\begin{pmatrix}\Phi_{r_1}(g) & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \Phi_{r_1}(g) & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \Phi_{r_t}(g) & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & \Phi_{r_t}(g)\end{pmatrix}\begin{matrix}\left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}m_{r_1} \\ \vdots \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}m_{r_t}\end{matrix}$$

由此得出：$g\in \mathrm{Ker}\varphi \Longleftrightarrow \Phi(g)=I \Longleftrightarrow \Phi_{r_i}(g)=I(i=1,2,\cdots,t)$ $\Longleftrightarrow g\in \mathrm{Ker}\varphi_{r_i}(i=1,2,\cdots,t) \Longleftrightarrow g\in \bigcap_{i=1}^{t}\mathrm{Ker}\varphi_{r_i}$，其中 I 是单位矩阵，其级数分别等于表示 φ，φ_{r_i} 的次数.

综上述得：$N=\bigcap_{i=1}^{t}\mathrm{Ker}\varphi_{r_i}$. ▌

根据定理 3.4.1，只要求出了 G 的所有不可约表示的核，就可以求出 G 的全部正规子群. 那么如何从 G 的特征标表看出 $\mathrm{Ker}\varphi_{r_i}$ 呢？这需要下面的命题：

命题 3.4.1 设 G 是指数为 m 的有限群，K 是复数域的子域并且包含本原 m 次单位根，设 φ 是 G 的任一 K-表示，它提供的特征标记作 χ，则

$$\mathrm{Ker}\varphi=\{g\in G\,|\,\chi(g)=\chi(1)\}.$$

证明 $g\in \mathrm{Ker}\varphi \Longleftrightarrow \Phi(g)=I \Longleftrightarrow \chi(g)=\chi(1)$，其中第二个等价条件是根据命题 3.1.13 的(iv). ▌

从命题 3.4.1 和定理 3.4.1 得出，如果域 K 是复数域的子域并且包含本原 m 次单位根(其中 m 是 G 的指数)，则从 G 的 K-特征标表就可以求出 G 的全部正规子群.

例 3.4.1 求 A_4 的全部正规子群.

解 从例 3.3.2 的 A_4 的复特征标表可以看出：

$\mathrm{Ker}\varphi_1 = A_4$;

$\mathrm{Ker}\varphi_2 = \mathrm{Ker}\varphi_3 = \{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$;

$\mathrm{Ker}\varphi_4 = \{(1)\}$.

因此,A_4 的全部正规子群是:$A_4,\{(1)\},A_4'$.

4.2 从群 G 的特征标表判断 G 是否为单群

命题 3.4.2 设 G 是有限群,域 K 的特征不能整除 $|G|$,设 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_s$ 是 G 的所有不等价的不可约 K-表示,其中 φ_1 是主表示. 则 G 是单群的充分必要条件为对任意 $i(2\leqslant i\leqslant s)$都有 $\mathrm{Ker}\varphi_i=\{1\}$.

证明 *充分性* 若对任意 $i(2\leqslant i\leqslant s)$都有 $\mathrm{Ker}\varphi_i=\{1\}$,则任意个 φ_i 的核的交等于$\{1\}$或 G. 据定理 3.4.1 得,G 的正规子群只有$\{1\}$和 G,从而 G 是单群.

必要性 假如有某个 $j(2\leqslant j\leqslant s)$使得 $\mathrm{Ker}\varphi_j\neq\{1\}$,由于 φ_j 不可约,必有 $\mathrm{Ker}\varphi_j\neq G$(否则,对一切 $g\in G$,都有 $\varphi_j(g)=1_V$,于是所有 $\varphi_j(g)$有公共的特征向量,据命题 1.3.1 得,φ_j 有 1 维 G 不变子空间. 由于 φ_j 不可约,因此 φ_j 必是 1 次的. 又由于 $\varphi_j(g)=1_V,\forall g\in G$,所以 $\varphi_j=\varphi_1$,这与 $j\neq1$ 矛盾). 这时 $\mathrm{Ker}\varphi_j$ 是 G 的非平凡正规子群,从而 G 不是单群. ▌

若域 K 是复数域的子域并且包含本原 m 次单位根(其中 m 是有限群 G 的指数),则利用命题 3.4.1 和 3.4.2,可从 G 的 K 特征标表看出 G 是否为单群.

4.3 从群 G 的特征标表求 G 的换位子群

命题 3.4.3 设 G 是指数为 m 的有限群,域 K 包含本原 m 次单位根,则 G 的换位子群 G' 是 G 的所有 1 次 K-表示的核的交.

证明 据命题 1.2.2,G 的每个 1 次 K-表示是 G/G' 的某个 1 次 K-表示的提升. 设 $\bar{\varphi}_1,\bar{\varphi}_2,\cdots,\bar{\varphi}_t$ 是 G/G' 的全部 1 次 K-表示,把它们提升得到 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_t$ 便是 G 的全部 1 次 K-表示. 因为 $\varphi_i(g)$

$=\tilde{\varphi}_i(gG')(i=1,2,\cdots,t)$，$\forall\ g\in G$，所以我们有

$$g\in\bigcap_{i=1}^{t}\mathrm{Ker}\varphi_i \iff gG'\in\bigcap_{i=1}^{t}\mathrm{Ker}\tilde{\varphi}_i.$$

因为域 K 包含本原 m 次单位根，所以 K 包含所有 m 次单位根．由于 G/G' 的指数 r 是 m 的因子，所以 r 次单位根一定也是 m 次单位根，从而 K 包含本原 r 次单位根．据定理 1.5.1，G/G' 的每一个不可约 K-表示是 1 次的．因此，$\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_2,\cdots,\tilde{\varphi}_t$ 是 G/G' 的全部不等价的不可约 K-表示．据习题 3.1 的第 2 题知 $\bigcap_{i=1}^{t}\mathrm{Ker}\tilde{\varphi}_i=\{G'\}$．

综上述知，$g\in\bigcap_{i=1}^{t}\mathrm{Ker}\varphi_i\iff gG'=G'\iff g\in G'$，由此得出，

$$G'=\bigcap_{i=1}^{t}\mathrm{Ker}\varphi_i. \quad \blacksquare$$

显然，如果 φ_i 是 G 的 1 次 K-表示，其中 K 是任一域，则从 $\chi_i(g)=1$ 可以得出 $\Phi_i(g)=(1)$，从而 $g\in\mathrm{Ker}\varphi_i$．反之显然．因此若 φ_i 是 G 的 1 次 K-表示，则 $\mathrm{Ker}\varphi_i=\{g\in G\mid\chi_i(g)=1\}$．于是从 G 的特征标表可以看出 G 的 1 次表示的核，然后利用命题 3.4.3 可以求出 G'，这里只要求 K 是包含本原 m 次单位根的域．

4.4 从群 G 的特征标表求 G 的共轭类里元素的数目

命题 3.4.4 设 G 是有限群，K 是特征不能整除 $|G|$ 的域并且使得 $D_i\cong K\ (i=1,2,\cdots,s)$．设 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_s$ 是 G 的所有不相等的不可约特征标，设 $C_1,C_2,\cdots,C_s$ 是 G 的全部共轭类，$g_j\in C_j(j=1,2,\cdots,s)$．则

$$|C_j|=|G|\Big/\sum_{l=1}^{s}\chi_l(g_j)\chi_l(g_j^{-1}),\quad j=1,2,\cdots,s.$$

证明 据第二正交关系得

$$\sum_{l=1}^{s}\chi_l(g_j)\chi_l(g_j^{-1})=|C_G(g_j)|=\frac{|G|}{|C_j|},$$

由此即得 $|C_j|$ 的公式． $\blacksquare$

在命题 3.4.4 的条件下，据定理 2.3.6 的(ii)，$|G|$等于 G 的所有不等价的不可约表示的次数的平方和. 于是再据命题 3.1.1，便可以从 G 的特征标表求出$|G|$. 特别地，如果域 K 的特征为 0，且 $D_i\cong K$，$i=1,2,\cdots,s$，则

$$|G| = \sum_{i=1}^{s}(\chi_i(1))^2.$$

例如，在例 3.3.2 中已给出 A_4 的复特征标表，我们来求(123)所在的共轭类里元素的数目：

$$12/(1\cdot 1+\omega\cdot\omega^2+\omega^2\cdot\omega+0\cdot 0)=\frac{12}{3}=4.$$

4.5　从群 G 的特征标表求 G 的中心 $Z(G)$

从群 G 的特征标表求 G 的中心 $Z(G)$有两种方法：

方法一　因为 G 的中心里的每个元素自成一个共轭类，所以 $Z(G)$等于元素数目为 1 的共轭类的并集. 利用命题 3.4.4 即可求出 $Z(G)$，这里要求 K 的特征不能整除$|G|$并且 $D_i\cong K$ $(i=1,2,\cdots,s)$.

方法二　令 $Z(\chi):=\{g\in G \mid |\chi(g)|=\chi(1)\}$，这里 χ 是有限群 G 的任一复特征标，$Z(\chi)$称为 χ 的中心. 设 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_s$ 是 G 的所有不同的不可约复特征标，据习题 3.1 的第 5 题可知，$Z(G)=\bigcap_{i=1}^{s}Z(\chi_i)$. 由于 $Z(\chi_i)$可以从 G 的复特征标表看出，从而可求出 $Z(G)$.

4.6　特征标表能否决定群的同构类？

一般说来，群 G 的特征标表不能决定 G 的乘法表，因此，特征标表相同的群不一定同构. 例如二面体群 D_4 与四元数群有相同的复特征标表，但它们不同构.

下面的命题说明：G 的特征标表能决定 G 的共轭类的类和的

乘法表.

命题 3.4.5 设 G 是有限群，域 K 的特征不能整除 $|G|$ 并且 $D_i \cong K$ $(i=1,2,\cdots,s)$. 设 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_s$ 是 G 的所有不同的不可约 K-特征标，设 $C_1,C_2,\cdots,C_s$ 是 G 的全部共轭类，C_i 里元素的和记作 c_i，C_i 的代表元为 $g_i(i=1,2,\cdots,s)$. 设

$$c_i c_j = \sum_{l=1}^{s} a_{ijl} c_l, \quad a_{ijl} \in K, 1 \leqslant i,j,l \leqslant s. \tag{1}$$

则

$$a_{ijm} = \frac{|C_i||C_j|}{|G|} \sum_{t=1}^{s} \frac{\chi_t(g_i)\chi_t(g_j)\chi_t(g_m^{-1})}{\chi_t(1)}, \tag{2}$$

其中 $1 \leqslant i,j,m \leqslant s$.

证明 在定理 2.3.4 的证明过程中已指出：$c_1,c_2,\cdots,c_s$ 是群代数 KG 的中心 $Z(KG)$ 的一个 K-基，因此可以假设(1)式成立. 下面的工作是要来计算系数 a_{ijl}.

设 $e_1,e_2,\cdots,e_s$ 是 KG 的全部中心本原幂等元，并且让 e_t 与 χ_t 对应，$t=1,2,\cdots,s$. 根据习题 3.2 的第 1 题，有

$$c_i = |C_i| \sum_{t=1}^{s} \frac{\chi_t(g_i)}{\chi_t(1)} e_t, \quad i = 1,2,\cdots,s. \tag{3}$$

把(3)代入(1)，并且比较等式两边 e_t 的系数，得

$$|C_i||C_j| \frac{\chi_t(g_i)\chi_t(g_j)}{[\chi_t(1)]^2} = \sum_{l=1}^{s} a_{ijl} |C_l| \frac{\chi_t(g_l)}{\chi_t(1)}. \tag{4}$$

在(4)式两边乘以 $\chi_t(g_m^{-1})$，并且对 t 求和得

$$\begin{aligned} &|C_i||C_j| \sum_{t=1}^{s} \frac{\chi_t(g_i)\chi_t(g_j)\chi_t(g_m^{-1})}{\chi_t(1)} \\ &= \sum_{l=1}^{s} a_{ijl} |C_l| \sum_{t=1}^{s} \chi_t(g_l)\chi_t(g_m^{-1}). \end{aligned} \tag{5}$$

利用第二正交关系，(5)式右边等于 $a_{ijm}|C_m||C_G(g_m)|$，即 $a_{ijm}|G|$. 代回(5)式便可求出 a_{ijm} 的表达式为(2)式. ▌

命题 3.4.5 中的 $a_{ijm}(1 \leqslant i,j,m \leqslant s)$ 称为代数 $Z(K[G])$ 对于

K-基$\{c_1,c_2,\cdots,c_s\}$的结构常数，它们完全决定了 $Z(K[G])$的乘法. 由于 a_{ijm}被 G 的特征标表决定，因此 G 的特征标表能决定 G 的类和的乘法表.

若 G 是有限 abel 群，则 G 中每个元素自成一个共轭类，此时(1)式和(2)式分别成为

$$g_i g_j = \sum_{l=1}^{s} a_{ijl} g_l,$$

$$a_{ijm} = |G|^{-1}\sum_{t=1}^{s}\chi_t(g_i)\chi_t(g_j)\chi_t(g_m^{-1}),$$

于是 G 的特征标表完全决定了 G 的乘法表，从而如果两个有限 abel 群的特征标表相同(经过适当的行的调换或列的调换后相同)，则它们同构.

我们还可以从另一角度说明有限 abel 群的特征标表决定了群的同构类：设 G 是指数为 m 的有限 abel 群，K 是包含本原 m 次单位根的域，则据定理 1.5.1，G 的每一个不可约 K-表示是 1 次的；据定理 1.5.3，G 的不等价的 1 次 K-表示的数目等于$|G|$，并且 G 的所有 1 次 K-表示组成的集合 $\hat{G}$ 对于如下规定的乘法运算

$$(\varphi_1\varphi_2)(g) := \varphi_1(g)\varphi_2(g), \quad \varphi_1,\varphi_2 \in \hat{G}, \quad g \in G$$

成为一个群，称 $\hat{G}$ 是 G 在 K 上的特征标群. 定理 1.5.3 已证明 $\hat{G} \cong G$. 由于 G 的 1 次 K-表示可以跟它提供的特征标等同，所以 $\hat{G}$ 也就是由 abel 群 G 的所有 1 次特征标 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_n$ 组成，其中 $n=|G|$. 这也就是称 $\hat{G}$ 是 G 的**特征标群**的原因. 显然，G 的特征标表完全决定了 $\hat{G}$ 的乘法表. 于是，如果两个有限 abel 群 G_1,G_2 的特征标表相同(经过适当的行置换或列置换后相同)，则 $\hat{G}_1$ 与 $\hat{G}_2$ 同构，从而 G_1 与 G_2 同构.

设 G 是有限非 abel 群，由于 $Z(G)$里的每个元素在 G 中自成一个共轭类，因此从(1)和(2)式知道，G 的特征标表完全决定了 $Z(G)$的乘法表. 从而如果 G_1 与 G_2 的特征标表相同，则 $Z(G_1)$与 $Z(G_2)$同构.

4.7 从群 G 的复特征标表可以做出它的商群的特征标表

命题 3.4.6 设 N 是有限群 G 的正规子群，K 是任一域，设 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_t$ 是 G 的所有不可约 K-表示使得 $N\subseteq \mathrm{Ker}\varphi_i(i=1,2,\cdots,t)$. 设 $\tilde{\varphi}_i$ 是 φ_i 对于正规子群 N 的分解，$i=1,2,\cdots,t$. 则 $\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_2,\cdots,\tilde{\varphi}_t$ 是 G/N 的全部不等价的不可约 K-表示.

证明 从第一章§2知道，由于 $N\subseteq \mathrm{Ker}\varphi_i$，所以 φ_i 可以对于正规子群 N 分解得到 $\tilde{\varphi}_i$，其中 $\tilde{\varphi}_i(gN):=\varphi_i(g),\forall\, gN\in G/N$. $\tilde{\varphi}_i$ 的提升是 φ_i. 根据命题 1.3.3，由于 φ_i 不可约，所以 $\tilde{\varphi}_i$ 也不可约. 仍据命题 1.3.3，商群 G/N 的任一不可约表示的提升是 G 的不可约表示，并且它的核包含 N. 因此，$\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_2,\cdots,\tilde{\varphi}_t$ 是 G/N 的全部不等价的不可约 K-表示. ▌

命题 3.4.7 设 N 是有限群 G 的正规子群，记 $\overline{G}=G/N,\overline{g}=gN$. 则对一切 $g\in G$，有

$$|C_{\overline{G}}(\overline{g})|\leqslant |C_G(g)|.$$

证明 设 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_t$ 是 G 的所有不可约复表示使得 $N\subseteq \mathrm{Ker}\varphi_i(i=1,2,\cdots,t)$. 设 φ_i 对于正规子群 N 的分解是 $\tilde{\varphi}_i$，据命题 3.4.6，$\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_2,\cdots,\tilde{\varphi}_t$ 是 G/N 的所有不等价的不可约复表示. 设 χ_i，$\tilde{\chi}_i$ 分别是 $\varphi_i,\tilde{\varphi}_i$ 提供的特征标，则 $\tilde{\chi}_i(\overline{g})=\chi_i(g),\forall\, g\in G,i=1,2,\cdots,t$. 于是据第二正交关系得

$$\begin{aligned}|C_{\overline{G}}(\overline{g})| &= \sum_{i=1}^{t}\tilde{\chi}_i(\overline{g})\tilde{\chi}_i(\overline{g}^{-1}) = \sum_{i=1}^{t}|\tilde{\chi}_i(\overline{g})|^2 = \sum_{i=1}^{t}|\chi_i(g)|^2\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{s}|\chi_i(g)|^2 = |C_G(g)|,\end{aligned}$$

其中 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_t,\chi_{t+1},\cdots,\chi_s$ 是 G 的所有不相等的不可约复特征标. ▌

命题 3.4.8 设 N 是有限群 G 的正规子群，设 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_t$ 是 G 的所有不可约复表示使得 $N\subseteq \mathrm{Ker}\varphi_i(i=1,2,\cdots,t)$；$\varphi_i$ 提供的特征标记作 $\chi_i(i=1,2,\cdots,t)$，其中 χ_1 是 G 的主特征标. 设 $g_1,g_2,\cdots,$

g_l 是 G 的共轭类的代表元系. 则 g_jN 与 g_lN 在 G/N 中共轭的充分必要条件是 $\chi_i(g_j)=\chi_i(g_l)$, $i=1,2,\cdots,t$.

证明 设 φ_i 对于正规子群 N 的分解是 $\tilde{\varphi}_i(i=1,2,\cdots,t)$, 于是 $\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_2,\cdots,\tilde{\varphi}_t$ 是 G/N 的全部不等价的不可约复表示. $\tilde{\varphi}_i$ 提供的特征标记作 $\tilde{\chi}_i$, $i=1,2,\cdots,t$. 则 $\tilde{\chi}_i(gN)=\tilde{\chi}_i(g)$, $\forall\ g\in G$.

若 g_jN 与 g_lN 在 G/N 中共轭, 则 $\tilde{\chi}_i(g_jN)=\tilde{\chi}_i(g_lN)$, 从而 $\chi_i(g_j)=\chi_i(g_l)$, $i=1,2,\cdots,t$.

反之, 若 $\chi_i(g_j)=\chi_i(g_l)$, $i=1,2,\cdots,t$, 则有

$$\sum_{i=1}^{t}\tilde{\chi}_i(g_lN)\tilde{\chi}_i((g_jN)^{-1}) = \sum_{i=1}^{t}\chi_i(g_l)\chi_i(g_j^{-1})$$
$$= \sum_{i=1}^{t}\chi_i(g_l)\overline{\chi_i(g_j)} = \sum_{i=1}^{t}|\chi_i(g_l)|^2.$$

由于 $\chi_1(g_l)=1$, 所以上式不等于零. 据第二正交关系知, g_lN 与 g_jN 在 G/N 的同一个共轭类里. ▌

利用命题 3.4.6 和命题 3.4.8, 我们可以从 G 的复特征标表求出商群 G/N 的复特征标表.

习　题　3.4

1. 求下列群的全部正规子群:

(1) 四元数群;

(2) $G=\langle a,b\,|\,a^7=1,b^3=1,bab^{-1}=a^2\rangle$.

2. 设群 G 的复特征标表如下:

	$g_1=1$	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	ω^2	ω	ω^2	ω
χ_3	1	1	1	ω	ω^2	ω	ω^2
χ_4	2	-2	0	-1	-1	1	1
χ_5	2	-2	0	$-\omega^2$	$-\omega$	ω^2	ω
χ_6	2	-2	0	$-\omega$	$-\omega^2$	ω	ω^2
χ_7	3	3	-1	0	0	0	0

其中 $\omega=e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

(1) 求 $|G|$ 以及 G 的各个共轭类的元素数目;

(2) 求 G 的全部正规子群(只要求指出每一个正规子群由哪些共轭类组成以及该子群的阶);

(3) 求 G 的换位子群 G'(要求同(2));

(4) 求 G 的中心 $Z(G)$(要求同(2));

(5) G 是否为可解群?

(6) 说明 G 是它的 Sylow2-子群与 Sylow3-子群的半直积(注:群 G 如果有一个正规子群 N 与一个子群 H 使得 $NH=G$,并且 $N\cap H=\{1\}$,则称 G 是它的子群 N 与 H 的半直积,记作 $G=N\rtimes H$. 与习题 3.3 的第 6 题比较,可以看出:若 G 是群 N 与群 H 的半直积,则 G 是它的子群 N^* 与 H^* 的半直积,其中 N^*,H^* 的定义见习题 3.3 的第 6 题);

(7) 求 $G/Z(G)$的复特征标表.

3. 设 G 是指数为 m 的有限 abel 群,K 是包含本原 m 次单位根的域,$\hat{G}$ 是 G 在 K 上的特征标群. 对于 G 的任一特征标 χ,它的逆步特征标记作 χ^*. 证明:对于 $\chi\in\hat{G}$,有 $\chi^{-1}=\chi^*$.

4. 设 G 是指数为 m 的有限 abel 群,K 是包含本原 m 次单位根的域,证明 G 的特征标表的第一行(列)的行(列)和为 $|G|\cdot 1$,其余行(列)的行(列)和为 0.

§5 不可约复特征标的次数的性质

本节将证明一个重要结果:有限群 G 的任一不可约复特征标的次数能整除 G 的阶.

我们需要一些预备知识.

定义 1 一个复数 α 称为**代数整数**,如果它是首项系数为 1 的整系数多项式的根.

显然,任一整数是代数整数,今后我们把整数称为**有理整数**.

我们用 $\mathbf{Z}[\alpha]$表示复数域 C 中包含整数环 Z 和复数 α 的所有子环的交，也就是 Z 添加 α 得到的 C 的子环. 抽象代数课程已证明 $\mathbf{Z}[\alpha]$是 α 的整系数多项式组成的集合.

命题 3.5.1 复数 α 是代数整数当且仅当 $\mathbf{Z}[\alpha]$是有限生成的 $\mathbf{Z}$-模.

证明 若 α 是代数整数，设 α 的极小多项式为

$$m(x) = x^r + a_1x^{r-1} + \cdots + a_r, \quad a_i \in \mathbf{Z}, 1 \leqslant i \leqslant r,$$

则 $\alpha^r = -a_1\alpha^{r-1} - \cdots - a_r$. 由此得出 $\mathbf{Z}[\alpha]$是由 $\alpha^{r-1}, \alpha^{r-2}, \cdots, \alpha, 1$ 生成的 $\mathbf{Z}$-模.

反之，若 $\mathbf{Z}[\alpha]$是有限生成的 $\mathbf{Z}$-模，设它的一组生成元是 $f_1(\alpha), f_2(\alpha), \cdots, f_n(\alpha)$. 选择一个正整数 N 使得 $N > \deg f_i(x)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. 因为 $\alpha^N \in \mathbf{Z}[\alpha]$，所以 $\alpha^N = b_1f_1(\alpha) + \cdots + b_nf_n(\alpha), b_i \in \mathbf{Z}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. 这说明 α 是多项式 $x^N - b_1f_1(x) - \cdots - b_nf_n(x)$的根，因此 α 是代数整数. ▌

命题 3.5.2 所有代数整数组成的集合是 C 的子环，它与有理数域的交是有理整数集.

证明 任取两个代数整数 α, β. 设 $\mathbf{Z}[\alpha]$的一组生成元是 $f_1(\alpha), f_2(\alpha), \cdots, f_n(\alpha)$; $\mathbf{Z}[\beta]$的一组生成元是 $h_1(\beta), h_2(\beta), \cdots, h_m(\beta)$，则 $\mathbf{Z}[\alpha] = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Z}f_i(\alpha), \mathbf{Z}[\beta] = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{Z}h_j(\beta)$. 从而

$$\mathbf{Z}[\alpha,\beta] = \mathbf{Z}[\alpha][\beta] = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Z}[\beta]f_i(\alpha) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathbf{Z}h_j(\beta)f_i(\alpha),$$

因此 $\mathbf{Z}[\alpha,\beta]$是有限生成的 $\mathbf{Z}$-模. 因为主理想整环上有限生成模的子模是有限生成的，所以 $\mathbf{Z}[\alpha+\beta], \mathbf{Z}[\alpha-\beta], \mathbf{Z}[\alpha\beta]$都是有限生成的. 从而 $\alpha \pm \beta, \alpha\beta$ 都是代数整数. 因此所有代数整数组成的集合是 C 的子环.

若代数整数 α 是有理数，设 $\alpha = q/p$，其中 $(p,q)=1$，且 $p>0$. 设 α 的极小多项式为 $m(x) = x^r + a_1x^{r-1} + \cdots + a_r$，则有

$$q^r = -pa_1q^{r-1} - \cdots - a_rp^r.$$

由此推出 $p|q^r$. 由于 $(p,q)=1$，所以 $p=1$. 从而 α 是有理整数. ▌

命题 3.5.3 设 G 是有限群. 对于任一 $\chi_i\in \mathrm{Irr}(G)$，设 w_i 是 $\boldsymbol{C}[G]$ 到 $\boldsymbol{C}$ 的一个映射，它的定义如下：

$$w_i(A)=\frac{\chi_i(A)}{\chi_i(1)},\quad \forall\, A\in \boldsymbol{C}[G].$$

则

(i) $w_i(A+B)=w_i(A)+w_i(B),\quad \forall\, A,B\in \boldsymbol{C}[G]$;

(ii) $w_i(kA)=kw_i(A),\quad \forall\, A\in \boldsymbol{C}[G], k\in \boldsymbol{C}$;

(iii) $w_i(AB)=w_i(A)w_i(B),\quad \forall\, A\in Z(\boldsymbol{C}[G]), B\in \boldsymbol{C}[G]$;

(iv) $w_i(c_j)$ 是代数整数，其中 c_j 是 G 的任一共轭类 C_j 的类和.

证明 (i)和(ii)是显然的.

(iii) 设 $e_1,e_2,\cdots,e_s$ 是 $\boldsymbol{C}[G]$ 的全部中心本原幂等元，并且 e_j 与 χ_j 对应，$j=1,2,\cdots,s$. 从引理 3.2.1 的证明过程知

$$\chi_i(e_jg)=\delta_{ij}\chi_i(g),\quad \forall\, g\in G. \tag{1}$$

于是 $w_i(e_j)=w_i(e_j\cdot 1)=\delta_{ij}$. 对于任意 $A\in Z(\boldsymbol{C}[G])$，设 $A=\sum_{j=1}^{s}k_je_j$，其中 $k_j\in \boldsymbol{C}$. 我们有 $w_i(A)=\sum_{j=1}^{s}k_jw_i(e_j)=k_i$，于是 $A=\sum_{j=1}^{s}w_j(A)e_j$. 因此对于任意 $g\in G$，我们有

$$w_i(Ag)=\sum_{j=1}^{s}w_j(A)w_i(e_jg)=\sum_{j=1}^{s}w_j(A)\frac{\chi_i(e_jg)}{\chi_i(1)}=w_i(A)w_i(g).$$

由此得出，对于任意 $B\in \boldsymbol{C}[G]$，我们有

$$w_i(AB)=w_i(A)w_i(B).$$

(iv) 设 $C_1,C_2,\cdots,C_s$ 是 G 的所有共轭类，c_i 是 C_i 的类和. 则 $c_jc_k=\sum_{l=1}^{s}m_{jkl}c_l$，$1\leqslant j,k\leqslant s$. 因为此式的左边是 G 中元素的整系数线性组合，所以 m_{jkl} 是整数，$1\leqslant j,k,l\leqslant s$. 任意给定 $i\in\{1,2,\cdots,s\}$，从上式得到

$$w_i(c_j)w_i(c_k) = \sum_{l=1}^{s} m_{jkl} w_i(c_l), \quad 1 \leqslant j, k \leqslant s. \tag{2}$$

固定 j,由(2)式得出

$$w_i(c_j)\begin{pmatrix} w_i(c_1) \\ \vdots \\ w_s(c_s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{j11} & m_{j12} & \cdots & m_{j1s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{js1} & m_{js2} & \cdots & m_{jss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_i(c_1) \\ \vdots \\ w_i(c_s) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

假如 $w_i(c_1)=\cdots=w_i(c_s)=0$,则对一切 $A\in(\mathbf{Z}(\mathbf{C}[G])$ 有 $w_i(A)=0$. 据(iii)的证明过程知道,对于 $A\in\mathbf{Z}(\mathbf{C}[G])$,有

$$A = \sum_{j=1}^{s} w_j(A)e_j.$$

由此推出对一切 $A\in\mathbf{Z}(\mathbf{C}[G])$,$A$ 可以由 $e_1,e_2,\cdots,e_{i-1},e_{i+1},\cdots,e_s$ 线性表出,这与 $e_1,e_2,\cdots,e_s$ 是 $\mathbf{Z}(\mathbf{C}[G])$的一个基矛盾. 故(3)式表明 $w_i(c_j)$是整系数矩阵(m_{jkl})的特征值,从而它是代数整数. ∎

注 由于 $1=e_1+e_2+\cdots+e_s$,所以 $w_i(1)=1$. 再结合上述命题的(i)、(ii)和(iii)可得出:w_i 是 $\mathbf{Z}(\mathbf{C}[G])$到 $\mathbf{C}$ 的一个代数同态,并且对于 $A\in\mathbf{Z}(\mathbf{C}[G])$有 $A=\sum_{j=1}^{s}w_j(A)e_j$.

推论 3.5.1 设 $\chi\in\mathrm{Irr}(G)$. 则对于 $A\in\mathbf{Z}(\mathbf{C}[G])$和 $B\in\mathbf{C}[G]$,有

$$\chi(AB) = \frac{\chi(A)\chi(B)}{\chi(1)}. \tag{4}$$

定理 3.5.1 有限群 G 的不可约复特征标的次数整除$|G|$.

证明 设 g_j 是 G 的共轭类 C_j 的代表元,$j=1,2,\cdots,s$. 设 $\chi_i\in\mathrm{Irr}(G)$,则由第一正交关系得

$$|G| = \sum_{j=1}^{s} |C_j|\chi_i(g_j)\chi_i(g_j^{-1}). \tag{5}$$

从而有

$$\frac{|G|}{\chi_i(1)} = \sum_{j=1}^{s} \frac{|C_j|\chi_i(g_j)}{\chi_i(1)}\chi_i(g_j^{-1}) = \sum_{j=1}^{s} w_i(c_j)\chi_i(g_j^{-1}). \tag{6}$$

$\chi_i(g_j^{-1})$是 m 次单位根的和(其中 m 是 G 的指数),因此它是代数

整数. $w_i(c_j)$也是代数整数. 于是(6)式右边是代数整数，从而左边也是代数整数. 又由于$\frac{|G|}{\chi_i(1)}$是有理数，据命题 3.5.2 得，$\frac{|G|}{\chi_i(1)}$是有理整数. 由此推出 $\chi_i(1) \Big| |G|$. ▌

习 题 3.5

1. 设 G 是有限群，$\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_s$ 是 G 的所有不同的不可约复特征标，$C_1, C_2, \cdots, C_s$ 是 G 的全部共轭类，c_j 是 C_j 的类和，$g_j \in C_j$ $(j=1,2,\cdots,s)$. 设 χ_i 是 G 的复表示 φ_i 提供的，由 φ_i 扩充成的 $\boldsymbol{C}[G]$的表示记作 φ_i^*，它提供的特征标记作 χ_i^* $(i=1,2,\cdots,s)$. 证明：

$$\Phi_i^*(c_j) = \frac{|C_j|\chi_i(g_j)}{\chi_i(1)} I, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant s,$$

其中 I 是单位矩阵，Φ_i^* 是 φ_i^* 提供的矩阵表示.

（**提示**：证法一 利用本节公式 $A = \sum_{i=1}^{s} w_i(A) e_i$ 对于 $A \in \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{C}[G])$以及 $w_i(c_j)$的公式，然后利用引理 3.2.1 的证明过程中关于 $\varphi_i^*(e_j)$的公式.

证法二 去证 $\varphi_i^*(c_j)$与一切 $\varphi_i(g)$可交换$(g \in G)$；然后利用习题 2.2 的第 7 题.）

2. 证明：若 G 是一般线性群 $\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{C})$的有限子群并且 G 是单群，则 G 必为 abel 群，从而 G 同构于素数阶循环群.

（**提示**：只要去证 G 有一个忠实的 2 次可约复表示. 据习题 1.3 的第 1 题，$\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{C})$在向量空间 $V=\boldsymbol{C}^2$ 上有一个忠实的 2 次不可约复表示：$\varphi(A)\alpha := A\alpha, \forall\, \alpha \in V, A \in \mathrm{GL}(2,\boldsymbol{C})$. 用反证法证明 φ 在 G 上的限制是可约的.）

3. 证明：任一非 abel 有限单群 G 没有 2 次不可约复表示.

（**提示**：利用第 2 题的结果.）

4. 设有限群 G 的阶为奇数，并且 G 有 s 个共轭类，证明：

$|G| \equiv s \pmod{16}$.

（提示：利用习题 3.3 的第 9 题的结果和习题 3.1 的第 1 题的结果以及定理 3.5.1、定理 2.3.3.）

5. 证明：阶不超过 19 的奇数阶群都是 abel 群.

§6 Burnside 的可解群判定定理的证明

作为群表示论的出色应用，本节将证明著名的 Burnside 关于可解群的判定定理.

定义 1 群 G 称为**可解的**，如果序列

$$G \supset G' \supset G'' \supset \cdots \supset G^{(i)} \supset \cdots$$

在有限步后终止于单位子群，这里每个 $G^{(i)}$ 是前一个群的换位子群.

容易证明有关可解群的下面三个命题：

命题 3.6.1 群 G 是可解的当且仅当存在递降的子群列

$$G = G_0 > G_1 > \cdots > G_s = \{e\},$$

使得每一个 $G_i \lhd G_{i-1}$ 并且商群 G_{i-1}/G_i 是 abel 群，$i=1,2,\cdots,s$.

命题 3.6.2 可解群的每个子群和商群是可解群.

命题 3.6.3 若 $N \lhd G$，并且 N 和 G/N 都可解，则 G 可解.

设 ε 是复数域里的 d 次本原单位根，则 $\langle\varepsilon\rangle$ 是 d 阶循环群，于是它有 $\varphi(d)$ 个生成元，其中 $\varphi(d)$ 是欧拉函数. 从而 d 次本原单位根共有 $\varphi(d)$ 个.

定义 2 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{\varphi(d)}$ 是复数域里的全部 d 次本原单位根，令 $f_d(x) = (x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\cdots(x-\varepsilon_{\varphi(d)})$，则 $f_d(x)$ 称为 d 阶**分圆多项式**.

若 $d|n$，则 d 次单位根也是 n 次单位根；反之，对于任一 n 次单位根 α，设 ξ 是本原 n 次单位根，并且设 α 在循环群 $\langle\xi\rangle$ 中的阶为 l，则 α 是 l 次本原单位根并且 $l|n$. 因此有

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} f_d(x). \qquad (1)$$

命题 3.6.4 分圆多项式一定是首一整系数多项式.

证明 对分圆多项式的次数 n 作归纳法. $n=1$ 时,结论显然成立. 假设对于 $d<n$, $f_d(x)$ 是首一整系数多项式,来看 $f_n(x)$ 的情形. 由(1)式得

$$f_n(x) = x^n - 1 \Big/ \prod_{\substack{d|n \\ d<n}} f_d(x). \qquad (2)$$

由归纳假设得, $\prod\limits_{\substack{d|n \\ d<n}} f_d(x)$ 是首一整系数多项式. 根据整数环上的一元多项式环的除法算式知道, $f_n(x) \in \mathbf{Z}[x]$. 显然, $f_n(x)$ 的首项系数为 1. 由数学归纳法原理即得结论. ▌

设本原 n 次单位根 ξ 的极小多项式为 $h(x)$,因为 ξ 是分圆多项式 $f_n(x)$ 的根,所以 $h(x) | f_n(x)$. 可以证明每个本原 n 次单位根都是 $h(x)$ 的根(参看聂灵沼、丁石孙著《代数学引论》p. 278~279),因此 $f_n(x) | h(x)$. 这说明 n 阶分圆多项式 $f_n(x)$ 是本原 n 次单位根 ξ 的极小多项式,从而分圆多项式在有理数域上不可约.

引理 3.6.1 设 χ 是有限群 G 的任一不可约复特征标, C 是 G 的一个共轭类,如果 $(|C|, \chi(1)) = 1$,则对任意 $g \in C$ 有 $\chi(g) = 0$ 或者 $|\chi(g)| = \chi(1)$.

证明 因为 $(|C|, \chi(1)) = 1$,所以存在整数 u, v 使得 $u|C| + v\chi(1) = 1$. 于是对任意 $g \in C$,有

$$\frac{\chi(g)}{\chi(1)} = u\frac{|C|\chi(g)}{\chi(1)} + v\chi(g). \qquad (3)$$

据命题 3.5.3 知,(3)式右边是代数整数,从而左边也是.

设 $\chi(1) = m$,设 g 的阶为 n,以 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{\varphi(n)}$ 表示所有本原 n 次单位根. 由于 $\chi(g)$ 是 n 次单位根的和,故可设 $\chi(g) = \varepsilon_1^{i_1} + \varepsilon_1^{i_2} + \cdots + \varepsilon_1^{i_m}$. 令

$$a_1 = \frac{\chi(g)}{\chi(1)} = \frac{\varepsilon_1^{i_1} + \varepsilon_1^{i_2} + \cdots + \varepsilon_1^{i_m}}{m},$$

$$a_l=\frac{\varepsilon_l^{i_1}+\varepsilon_l^{i_2}+\cdots+\varepsilon_l^{i_m}}{m},\quad 2\leqslant l\leqslant\varphi(n).$$

因为 $\varepsilon_l(1\leqslant l\leqslant\varphi(n))$的极小多项式是 n 阶分圆多项式 $f_n(x)$，所以 $\boldsymbol{Q}[\varepsilon_l]\cong\boldsymbol{Q}[x]/(f_n(x))$是一个域，从而可把 $\boldsymbol{Q}[\varepsilon_l]$记作 $\boldsymbol{Q}(\varepsilon_l)$，$l=1,2,\cdots,\varphi(n)$. 因为 ε_1 和 ε_l 都是 $f_n(x)$的根，所以存在 $\boldsymbol{Q}(\varepsilon_1)$到 $\boldsymbol{Q}(\varepsilon_l)$的 $\boldsymbol{Q}$-同构 τ_l 使得 $\tau_l(\varepsilon_1)=\varepsilon_l$，$2\leqslant l\leqslant\varphi(n)$. 由于 $\boldsymbol{Q}(\varepsilon_1)=\boldsymbol{Q}(\varepsilon_l)$，因此 τ_l 是 $\boldsymbol{Q}(\varepsilon_1)$的自同构. 容易算出 $\tau_l(a_1)=a_l$. 因为 a_1 是代数整数，所以 a_l 也是代数整数，$2\leqslant l\leqslant\varphi(n)$.

令

$$b=\prod_{l=1}^{\varphi(n)}a_l=\prod_{l=1}^{\varphi(n)}\frac{\varepsilon_l^{i_1}+\varepsilon_l^{i_2}+\cdots+\varepsilon_l^{i_m}}{m},$$

则 b 是代数整数. 令

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_{\varphi(n)})=\prod_{l=1}^{\varphi(n)}\frac{x_l^{i_1}+x_l^{i_2}+\cdots+x_l^{i_m}}{m},$$

则 $b=f(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{\varphi(n)})$. 显然 $f(x_1,x_2,\cdots,x_{\varphi(n)})$是对称多项式，其系数为有理数. 于是存在一个有理系数多项式 $\psi(x_1,x_2,\cdots,x_{\varphi(n)})$使得

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_{\varphi(n)})=\psi(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\varphi(n)}),$$

其中 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\varphi(n)}$是初等对称多项式，即 $\sigma_1=x_1+x_2+\cdots+x_{\varphi(n)}$，$\cdots$，$\sigma_{\varphi(n)}=x_1x_2\cdots x_{\varphi(n)}$. 记

$$\tilde{\sigma}_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_{\varphi(n)},\cdots,\tilde{\sigma}_{\varphi(n)}=\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_{\varphi(n)}.$$

则

$$f(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{\varphi(n)})=\psi(\tilde{\sigma}_1,\tilde{\sigma}_2,\cdots,\tilde{\sigma}_{\varphi(n)}).$$

因为 $\tilde{\sigma}_1,\tilde{\sigma}_2,\cdots,\tilde{\sigma}_{\varphi(n)}$是 $f_n(x)$的系数或其相反数，所以 $\tilde{\sigma}_1,\tilde{\sigma}_2,\cdots,\tilde{\sigma}_{\varphi(n)}$都是有理整数，从而 $\psi(\tilde{\sigma}_1,\tilde{\sigma}_2,\cdots,\tilde{\sigma}_{\varphi(n)})$是有理数，于是 $b=f(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{\varphi(n)})$是有理数，又 b 是代数整数，所以 b 是有理整数.

因为 $|\chi(t)|\leqslant\chi(1)$对一切 $t\in G$，所以如果 $|\chi(g)|\neq\chi(1)$，则 $|a_1|=\left|\frac{\chi(g)}{\chi(1)}\right|<1$. 又由于 $|a_l|=\frac{1}{m}|\varepsilon_l^{i_1}+\varepsilon_l^{i_2}+\cdots+\varepsilon_l^{i_m}|\leqslant1$，由此推

出 $|b|=\prod_{l=1}^{\varphi(n)}|a_l|<1$，从而 $b=0$. 因此至少有一个 a_j 为 0，于是 $a_1=\tau_j^{-1}(a_j)=0$，即 $\chi(g)=0$. ▌

定理 3.6.1 如果有限群 G 有一个共轭类 C 的元素数目是一个素数的方幂，则 G 不是单群.

证明 据命题 3.4.2，只要证 G 有一个不可约复表示(非主表示)其核不等于单位子群. 设 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_s$ 是 G 的全部不等价的不可约复表示，其中 φ_1 是主表示. 设 $|C|=p^r$，p 是素数，$r>0$. 考虑 G 的正则表示的分解：

$$\rho\approx\chi_1(1)\varphi_1\oplus\cdots\oplus\chi_s(1)\varphi_s, \tag{4}$$

其中 χ_i 是 φ_i 提供的特征标，$i=1,2,\cdots,s$. 由(4)式得

$$\begin{aligned}\chi_\rho(g) &= \chi_1(1)\chi_1(g)+\sum_{i=2}^{s}\chi_i(1)\chi_i(g)\\ &= 1+\sum_{i=2}^{s}\chi_i(1)\chi_i(g).\end{aligned} \tag{5}$$

取 $g\in C$，显然 $g\neq 1$，从而 $\chi_\rho(g)=0$. 于是从(5)式得

$$1=-\sum_{i=2}^{s}\chi_i(1)\chi_i(g). \tag{6}$$

从(6)式看出，$\chi_2(g),\chi_3(g),\cdots,\chi_s(g)$ 不全为零. 设 $j_1,j_2,\cdots,j_t\in\{2,3,\cdots,s\}$ 使得 $\chi_{j_1}(g)\neq 0,\cdots,\chi_{j_t}(g)\neq 0$，而其余 $\chi_i(g)=0$. 假如对每个 j_l 都有 $p\mid\chi_{j_l}(1)$，设 $\chi_{j_l}(1)=m_l p$ $(l=1,2,\cdots,t)$. 则由(6)式得

$$\frac{1}{p}=-\sum_{l=1}^{t}m_l\chi_{j_l}(g). \tag{7}$$

(7)式右边是代数整数，由此推出 $1/p$ 是代数整数，这是不可能的. 因此存在 j_k 使得 $p\nmid\chi_{j_k}(1)$，于是 $(|C|,\chi_{j_k}(1))=1$. 根据引理 3.6.1 得 $|\chi_{j_k}(g)|=\chi_{j_k}(1)$，从而 $\Phi_{j_k}(g)$ 是数量矩阵. 假如 $\mathrm{Ker}\varphi_{j_k}=\{1\}$，则 $G\cong\mathrm{Im}\Phi_{j_k}$. 由 $\Phi_{j_k}(g)\in Z(\mathrm{Im}\Phi_{j_k})$ 推出 $g\in Z(G)$，这与 $|C|=p^r$ 矛盾. 所以 $\mathrm{Ker}\varphi_{j_k}\neq\{1\}$. ▌

定理 3.6.2(Burnside) 每一个 $p^a q^b$ 阶群(p,q 都是素数)是

可解的.

证明 设群 G 的阶是 $p^a q^b$. 如果 a,b 中有一个为 0,则 G 是 p-群,从而 $Z(G)\neq\{1\}$. 若 $Z(G)=G$,则 G 是 abel 群,从而可解;若 $Z(G)\neq G$,则 $1<|G/Z(G)|<|G|$,于是由归纳假设(对 p-群的阶作归纳法)知 $G/Z(G)$ 可解,又由于 $Z(G)$ 可解,从而 G 可解.

下面设 $a\neq 0$,且 $b\neq 0$. 若 G 为 abel 群,则 G 可解. 下设 G 非 abel 群. 设 Q 是 G 的 Sylow q-子群,选取 $g\in Z(Q)$ 并且 $g\neq 1$,则 $Q\subset C_G(g)$. 设 g 在 G 的共轭类 C 中,则

$$|C|=\frac{|G|}{|C_G(g)|}=\frac{p^a q^b}{p^l q^b}=p^{a-l},\quad 其中\ l\leqslant a.$$

若 $l=a$,则 $C_G(g)=G$,于是 $g\in Z(G)$,这时 G 有一个非平凡的正规子群 $Z(G)$. 若 $l<a$,则据定理 3.6.1 知,G 不是单群. 总之不论 $l=a$ 或 $l<a$, G 都有一个非平凡的正规子群 N. 对 $p^a q^b$ 阶群的阶作归纳法, 由于 N 和 G/N 都是这种形式的群, 并且 $|N|<|G|$, $|G/N|<|G|$,于是由归纳假设知,N 和 G/N 都可解,从而 G 可解. ▌

第四章　表示的张量积，分裂域，群的直积的表示

为了求出有限群 G 在特征不能整除 $|G|$ 的域 K 上的所有不等价的不可约表示，方法之一是从 G 的已有的不可约表示出发去找出新的不可约表示. 为此，本章首先将介绍从 G 的已知表示构造新表示的又一种方法.

本章要讨论的第二个问题是：如果我们已求出了 G 在域 K 上的表示，如何由此得到 G 在 K 的任一扩域 F 上的表示？进一步问：若 G 在 K 上的一个表示 φ 是不可约的，由 φ 出发得到的 G 在 K 的扩域 F 上的表示是否仍然不可约？什么条件下仍然不可约？

本章要讨论的第三个问题是：从群 G_1 和 G_2 的表示如何得到它们的直积 $G_1 \times G_2$ 的表示？

以上三个问题的解决都需要模的张量积的概念，为此在第一节先介绍这个概念.

§1　模的张量积

为了给出模的张量积的定义，先引进平衡映射的概念.

定义 1　设 R 是有单位元的环，设 M 是右 R-模，N 是左 R-模，P 是 abel 加群. $M \times N$ 到 P 的一个映射 f 称为**平衡映射**，如果 f 满足：

$$f(m_1 + m_2, n) = f(m_1, n) + f(m_2, n),$$
$$f(m, n_1 + n_2) = f(m, n_1) + f(m, n_2),$$
$$f(m, rn) = f(mr, n),$$

其中 $r \in R, m_i \in M, n_i \in N, m \in M, n \in N$.

定义 2　R, M, N 同定义 1. 设 φ 是 $M \times N$ 到 abel 加群 T 的

平衡映射. 称 $M\times N$ 到 abel 加群 P 的平衡映射 f 可以通过 T 分解,如果存在一个群同态 $f^*: T\to P$ 使得 $f=f^*\varphi$.

定理 4.1.1 设 M 是右 R-模,N 是左 R-模,其中 R 是有单位元的环. 则存在一个 abel 加群 T 和一个平衡映射 $t: M\times N\to T$ 使得

(i) $\{t(m,n)\mid(m,n)\in M\times N\}$ 生成加群 T,且事实上 T 的每一个元素是有限和 $\sum_i t(m_i,n_i)$, 其中 $m_i\in M, n_i\in N$;

(ii) $M\times N$ 到任意一个 abel 加群 P 的每一个平衡映射能够通过 T 分解.

证明 (i) 令

$$F=\left\{\sum_{(m,n)\in M\times N} k_{(m,n)}(m,n)\;\middle|\; k_{(m,n)}\in \mathbf{Z}, \text{且只有有限多个} k_{(m,n)}\neq 0\right\},$$

规定 F 中两个元素相等当且仅当它们的对应系数相等,并且规定 F 中两个元素相加为对应的系数相加. 易验证 F 成为 abel 加群. 规定

$$s\left(\sum k_{(m,n)}(m,n)\right)\coloneqq\sum sk_{(m,n)}(m,n),\quad s\in\mathbf{Z},$$

易验证 F 成为 $\mathbf{Z}$-模,并且 $M\times N$ 中全体元素成为 F 的一个 $\mathbf{Z}$-基,从而 F 是自由 $\mathbf{Z}$-模.

设 H 是 F 的由下述形式和生成的子群:

$$(m_1+m_2,n)-(m_1,n)-(m_2,n), \tag{1}$$

$$(m,n_1+n_2)-(m,n_1)-(m,n_2), \tag{2}$$

$$(m,rn)-(mr,n), \tag{3}$$

其中 $m\in M, n\in N, r\in R$.

设 T 是商群 F/H. 定义一个映射

$$t: M\times N\to T;$$
$$(m,n)\mapsto(m,n)+H.$$

因为(1),(2),(3)式列出的和都在 H 里,所以在 T 中有

$$t(m_1+m_2,n)-t(m_1,n)-t(m_2,n)=0, \tag{4}$$

$$t(m,n_1+n_2)-t(m,n_1)-t(m,n_2)=0, \tag{5}$$

$$t(m,rn)-t(mr,n)=0. \tag{6}$$

这说明 t 是 $M\times N$ 到 T 的平衡映射.

由于 F 的每个元素是有限和 $\sum_i k_i(m_i,n_i)$，其中 $k_i\in\mathbf{Z}$，所以 T 的每个元素是有限和 $\sum_i[k_i(m_i,n_i)+H]$. 对于正整数 k 有

$$k(m,n)+H=k[(m,n)+H]=kt(m,n)=t(km,n);$$

$$\begin{aligned}(-k)(m,n)+H&=-[k(m,n)]+H\\&=-[k(m,n)+H]=-t(km,n).\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}&t(km,n)+t(-(km),n)\\&=t(0,n)=t(m_1+0,n)-t(m_1,n)\\&=t(m_1,n)-t(m_1,n)=0,\end{aligned}$$

所以 $-t(km,n)=t(-(km),n)$. 从而 T 的每个元素是有限和 $\sum_i t(m_i,n_i)$.

(ii) 设 P 是任一 abel 加群，f 是 $M\times N$ 到 P 的任一平衡映射. 因为 $M\times N$ 的元素组成 F 的 $\mathbf{Z}$-基，所以 f 定义了 F 到 P 的一个群同态 f'：

$$f'\Big(\sum_i k_i(m_i,n_i)\Big):=\sum_i k_i f(m_i,n_i).$$

由于 f 是平衡映射，所以 $f'(h)=0$ 对一切 $h\in H$. 从而 f' 诱导了商群 F/H 到 P 的一个群同态 f^* 使得

$$f^*[(m,n)+H]=f(m,n).$$

因为$(m,n)+H=t(m,n)$，所以 $f^*(t(m,n))=f(m,n)$，由此得出 $f^*t=f$. 这说明 f 可通过 T 分解. ▌

定义 3 设 R 是有单位元的环，M 是右 R-模，N 是左 R-模，把定理 4.1.1 中构造的 abel 加群 T 称为 M 和 N 的**张量积**，记作 $M\otimes_R N$.

下面的结果说明张量积是由定理 4.1.1 中的性质(i)和(ii)唯

一决定的(在同构的意义上).

推论 4.1.1 设 R 是有单位元的环，M 是右 R-模，N 是左 R-模. 设 T' 是 abel 加群，t' 是 $M\times N$ 到 T' 的平衡映射，它们也满足定理 4.1.1 中的性质(i)和(ii)，则存在 $M\otimes_R N$ 到 T' 上的群同构 σ 使得对一切 $(m,n)\in M\times N$，有 $\sigma(t(m,n))=t'(m,n)$.

证明 因为 $M\otimes_R N$ 和 t 满足定理 4.1.1 中的性质(i)和(ii)，所以存在群同态 σ: $M\otimes_R N\to T'$ 使得 $t'=\sigma t$.

同理，存在群同态 τ: $T'\to M\otimes_R N$ 使得 $t=\tau t'$. 从而

$$t'(m,n)=\sigma t(m,n)=(\sigma\tau)t'(m,n), \tag{7}$$

$$t(m,n)=\tau t'(m,n)=(\tau\sigma)t(m,n). \tag{8}$$

因为 $\{t(m,n)\mid(m,n)\in M\times N\}$ 生成加群 $M\otimes_R N$，并且 $\{t'(m,n)\mid(m,n)\in M\times N\}$ 生成加群 T'，所以由(7)和(8)式推出 $\sigma\tau$ 和 $\tau\sigma$ 分别是 T' 和 $M\otimes_R N$ 的恒等映射，从而 σ 是 $M\otimes_R N$ 到 T 的可逆映射，因此 σ 是双射，于是 σ 是 $M\otimes_R N$ 到 T' 上的群同构. ▌

根据推论 4.1.1，我们也可以说，右 R-模 M 和左 R-模 N 的张量积是由一个 abel 加群 T 和 $M\times N$ 到 T 的一个平衡映射 t 组成的一对，它使得定理 4.1.1 中的性质(i)和(ii)成立.

对于张量积$(M\otimes_R N,t)$，我们今后把 $t(m,n)$ 简记成 $m\otimes n$. 从定理 4.1.1 的证明过程中知道，$t(m,n)$ 是以 (m,n) 为代表的陪集 $(m,n)+H$，因此 $t(m,n)$ 用 $m\otimes n$ 来表示，其表示方法是不唯一的. 但是记号 $m\otimes n$ 有优点：具有直观性. 譬如，从(4)、(5)、(6)式，我们立即得到

$$(m_1+m_2)\otimes n=m_1\otimes n+m_2\otimes n, \tag{9}$$

$$m\otimes(n_1+n_2)=m\otimes n_1+m\otimes n_2, \tag{10}$$

$$m\otimes rn=mr\otimes n, \tag{11}$$

其中 $m,m_1,m_2\in M$；$n,n_1,n_2\in N$；$r\in R$. 运用记号 $m\otimes n$，则张量积 $M\otimes_R N$ 里的每个元素可表示成有限和 $\sum_i m_i\otimes n_i$，其中 $m_i\in M$，$n_i\in N$. 注意 $M\otimes_R N$ 里的元素表示成有限和 $\sum_i m_i\otimes n_i$ 的表法不

唯一.

我们有

$$0 \otimes n = (m+0) \otimes n - m \otimes n = m \otimes n - m \otimes n = 0;$$

同理有 $m\otimes 0=0, 0\otimes 0=0$. 所以 $M\otimes_R N$ 的零元素的表示方法有 $0\otimes n, m\otimes 0, 0\otimes 0$ 等. 还有可能 $m\neq 0, n\neq 0$, 但是, $m\otimes n=0$. 例如, 在 $\boldsymbol{Q}\otimes_Z \boldsymbol{Z}_2$ 中, $\frac{2}{3}\otimes 1=\frac{1}{3}\otimes 2\cdot 1=\frac{1}{3}\otimes 0=0$.

推论 4.1.2 设 R 是有单位元的环, M 是右 R-模, N 是左 R-模. 则 $M\times N$ 到任一 abel 加群 P 的每一个平衡映射能用一种且只有一种方式通过 $M\otimes_R N$ 分解.

证明 设 $f: M\times N\to P$ 是平衡映射, 由定理 4.1.1 知, 存在 $M\otimes_R N$ 到 P 的群同态 f^* 使得 $f=f^*t$, 其中 t 是 $M\times N$ 到 $M\otimes_R N$ 的平衡映射. 于是 $f(m,n)=f^*(m\otimes n), \forall\ (m,n)\in M\times N$. 如果 f 还有一种方式通过 $M\otimes_R N$ 分解, 即还存在 $M\otimes_R N$ 到 P 的另一群同态 g^* 使得 $f=g^*t$, 则也有 $f(m,n)=g^*(m\otimes n)$. 于是对于 $M\otimes_R N$ 中任意一个元素 $\sum\limits_i m_i\otimes n_i$ 有

$$\begin{aligned} f^*\Big(\sum_i m_i\otimes n_i\Big) &= \sum_i f^*(m_i\otimes n_i) = \sum_i f(m_i,n_i) \\ &= \sum_i g^*(m_i\otimes n_i) = g^*\Big(\sum_i m_i\otimes n_i\Big), \end{aligned}$$

因此 $f^*=g^*$. ▌

现在来讨论模的张量积与模的同态的关系.

定理 4.1.2 设 R 是有单位元的环, M 和 M' 是右 R-模, N 和 N' 是左 R-模; 设 f 是 M 到 M' 的模同态, g 是 N 到 N' 的模同态. 则存在 $M\otimes_R N$ 到 $M'\otimes_R N'$ 的唯一的群同态, 记作 $f\otimes g$, 使得

$$(f\otimes g)(m\otimes n) = f(m)\otimes g(n). \tag{12}$$

证明 考虑 $M\times N$ 到 $M'\otimes_R N'$ 的映射

$$\psi: (m,n)\mapsto f(m)\otimes g(n),$$

易验证 ψ 是平衡映射. 据推论 4.1.2 知, 存在 $M\otimes_R N$ 到 $M'\otimes_R N'$ 的唯一的群同态, 记作 $f\otimes g$, 使得

$$(f\otimes g)(m\otimes n)=\psi(m,n)=f(m)\otimes g(n). \quad \blacksquare$$

推论 4.1.3 设 R 是有单位元的环，M, M', M'' 都是右 R-模，N, N', N'' 都是左 R-模；设 $f: M\to M'$，$f': M'\to M''$，$g: N\to N'$，$g': N'\to N''$ 都是模同态. 则

$$(f'\otimes g')(f\otimes g)=f'f\otimes g'g. \tag{13}$$

证明 因为

$$\begin{aligned}(f'\otimes g')(f\otimes g)(m\otimes n)&=(f'\otimes g')(f(m)\otimes g(n))\\&=f'(f(m))\otimes g'(g(n)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f'f\otimes g'g)(m\otimes n)&=(f'f)(m)\otimes(g'g)(n)\\&=f'(f(m))\otimes g'(g(n)),\end{aligned}$$

所以 $(f'\otimes g')(f\otimes g)(m\otimes n)=(f'f\otimes g'g)(m\otimes n)$. 从而得(13)式. $\blacksquare$

下面讨论模的张量积与模的直和的关系.

定理 4.1.3 设 R 是有单位元的环，M 是右 R-模，M_1 和 M_2 是 M 的子模，并且 $M=M_1\oplus M_2$；N 是左 R-模. 则有下述群同构：

$$M\otimes_R N\cong M_1\otimes_R N\dotplus M_2\otimes_R N.$$

证明 因为 $M=M_1\oplus M_2$，所以有 M 到 M_i 的投影 π_i，其定义为：$\pi_i(m_1+m_2):=m_i$，$m_i\in M_i$，$1\leqslant i\leqslant 2$. 易验证 $\pi_i\in\mathrm{Hom}_R(M,M)$，并且

$$\begin{aligned}&1=\pi_1+\pi_2,\ \pi_i^2=\pi_i,\\&\pi_1\pi_2=\pi_2\pi_1=0,\ \pi_iM=M_i.\end{aligned}\tag{14}$$

令 $\theta_i=\pi_i\otimes 1$，$i=1,2$. 根据定理 4.1.2，每一个 θ_i 是加法群 $M\otimes_R N$ 的自同态，并且从(14)和(13)式得

$$1=\theta_1+\theta_2,\quad \theta_i^2=\theta_i,\quad \theta_1\theta_2=\theta_2\theta_1=0. \tag{15}$$

令 $T_i=\theta_i(M\otimes_R N)$，$i=1,2$. 我们来证

$$M\otimes_R N=T_1\oplus T_2.$$

对于 $m\otimes n\in M\otimes_R N$，有

$$\begin{aligned}m\otimes n&=1(m\otimes n)=(\theta_1+\theta_2)(m\otimes n)\\&=\theta_1(m\otimes n)+\theta_2(m\otimes n),\end{aligned}$$

由此可推出 $M\otimes_R N=T_1+T_2$.

任意 $x\in T_1\cap T_2$，因为 $x\in T_1$，所以存在 $y\in M\otimes_R N$ 使得 $x=\theta_1(y)$. 因为 $x\in T_2$，所以存在 $z\in M\otimes_R N$ 使得 $x=\theta_2(z)$. 从而 $\theta_1(x)=\theta_1\theta_2(z)=0$. 于是 $x=\theta_1(y)=\theta_1^2(y)=\theta_1(x)=0$. 这说明：$T_1\cap T_2=0$. 因此 $M\otimes_R N=T_1\oplus T_2$.

现在来证 $T_1\cong M_1\otimes_R N$. 为此只要说明 T_1 具有定理 4.1.1 中所给出的张量积的两条特征性质. 设 t 是 $M\times N$ 到 $M\otimes_R N$ 的平衡映射. 令 $\varphi=t|M_1\times N$，于是 $\varphi(m_1,n)=t(m_1,n)$，$m_1\in M_1$，$n\in N$. 因为 $T_1=\theta_1(M\otimes_R N)=(\pi_1\otimes 1)(M\otimes_R N)$，所以 T_1 中元素形如

$$\begin{aligned}(\pi_1\otimes 1)\Big(\sum_i m_i\otimes n_i\Big) &= \sum_i(\pi_1\otimes 1)(m_i\otimes n_i)\\ &= \sum_i \pi_1(m_i)\otimes n_i = \sum_i t(\pi_1(m_i),n_i)\\ &= \sum_i \varphi(\pi_1(m_i),n_i).\end{aligned}$$

从而 T_1 和 φ 满足定理 4.1.1 中的性质(i).

现在设 P 是任一 abel 加群，g 是 $M_1\times N$ 到 P 的任一平衡映射. 则 $g(\pi_1\times 1)$ 是 $M\times N$ 到 P 的平衡映射，其中 $(\pi_1\times 1)(m,n):=(\pi_1(m),n)$. 于是存在群同态 $g^*:M\otimes_R N\to P$ 使得 $g(\pi_1\times 1)=g^*t$. 令 $g_1=g^*|T_1$，于是 g_1 是 T_1 到 P 的群同态. 为了说明 g 可以通过 T_1 分解，只要证 $g=g_1\varphi$. 为此任取 $(m_1,n)\in M_1\times N$，因为

$$\begin{aligned}g_1\varphi(m_1,n) &= g_1t(m_1,n) = g_1(m_1\otimes n) = g^*(m_1\otimes n)\\ &= g^*t(m_1,n) = g(\pi_1\times 1)(m_1,n)\\ &= g(\pi_1(m_1),n) = g(m_1,n),\end{aligned}$$

所以 $g_1\varphi=g$. 从而 T_1 满足定理 4.1.1 中性质(ii). 因此，

$$T_1\cong M_1\otimes_R N.$$

同理可证 $T_2\cong M_2\otimes_R N$. 所以

$$M\otimes_R N\cong M_1\otimes_R N+M_2\otimes_R N. \quad \blacksquare$$

定理 4.1.3 可推广到 M 或者 N 是有限多个子模的直和的情形.

现在我们来讨论在什么条件下才能使张量积 $M\otimes_R N$ 也成为模.

定义 4 称 abel 加群 M 是环 R 和 S 上的 (S,R)-**双模**，如果 M 是左 S-模，又是右 R-模，并且满足

$$(sm)r = s(mr),\quad \forall\, s \in S, r \in R, m \in M.$$

例如，任一交换环 R 上的左模 M 是 (R,R)-双模，如果定义 $mr=rm, r\in R, m\in M$.

命题 4.1.1 若 M 是 (S,R)-双模，N 是左 R-模，则 $M\otimes_R N$ 是左 S-模.

证明 对于 $s\in S$，令 f_s: $(m,n)\mapsto sm\otimes n$. 容易验证 f_s 是 $M\times N$ 到 $M\otimes_R N$ 的平衡映射. 于是存在 $M\otimes_R N$ 到 $M\otimes_R N$ 的唯一的群同态 ψ_s 使得 $f_s=\psi_s t$. 于是 $f_s(m,n)=\psi_s t(m,n)=\psi_s(m\otimes n)$，从而得到 $\psi_s(m\otimes n)=sm\otimes n$. 现在规定

$$s\Big(\sum_i m_i\otimes n_i\Big) := \psi_s\Big(\sum_i m_i\otimes n_i\Big),$$

于是得到 $s\Big(\sum\limits_i m_i\otimes n_i\Big)=\sum\limits_i sm_i\otimes n_i$. 容易验证 $M\otimes_R N$ 成为左 S-模. ▌

类似地，若 M 是右 R-模，N 是 (R,S)-双模，则 $M\otimes_R N$ 是右 S-模，其中 $\Big(\sum\limits_i m_i\otimes n_i\Big)s=\sum\limits_i m_i\otimes n_i s$.

命题 4.1.2 设 $M=M_1\oplus M_2$，并且它们是 (S,R)-双模，设 N 是右 R-模，则定理 4.1.3 得到的同构

$$M\otimes_R N\cong M_1\otimes_R N \dotplus M_2\otimes_R N$$

是左 S-模同构.

证明 定理 4.1.3 证明过程中定义的 $T_i=\theta_i(M\otimes_R N)$，易验证它是左 S-模 $M\otimes_R N$ 的子模. 下面来证 $T_1\cong M_1\otimes_R N$ 是 S-同构. 从定理 4.1.3 的证明中知道 φ 是 $M_1\times N$ 到 T_1 的满足定理 4.1.1 中两条性质的平衡映射，其中 $\varphi=t|M_1\times N$. 现在设 t_1 是 $M_1\times N$ 到 $M_1\otimes_R N$ 的满足定理 4.1.1 中两条性质的平衡映射，则从推论 4.1.1 知道，存在 $M_1\otimes_R N$ 到 T_1 的群同构 σ 使得 $\varphi=\sigma t_1$. 我们来证 σ 是 S-同构：任取 $s\in S$，$\sum\limits_i m_i\otimes n_i\in M_1\otimes_R N$，我们有

$$\sigma\Big(s\Big(\sum_i m_i\otimes n_i\Big)\Big)=\sigma\Big(\sum_i sm_i\otimes n_i\Big)=\sum_i\sigma(sm_i\otimes n_i)$$
$$=\sum_i\sigma t_1(sm_i,n_i)=\sum_i\varphi(sm_i,n_i)$$
$$=\sum_i t(sm_i,n_i)=\sum_i sm_i\otimes n_i.$$

注意：上述一串式子中最后出现的 $sm_i\otimes n_i$ 是对于 $M\times N$ 到 $M\otimes_R N$的平衡映射 t 而言，而前面那些 $sm_i\otimes n_i$ 是对于 $M_1\times N$ 到 $M_1\otimes_R N$ 的平衡映射 t_1 而言. 我们也有

$$s\Big(\sigma\Big(\sum_i m_i\otimes n_i\Big)\Big)=s\Big(\sum_i\sigma(m_i\otimes n_i)\Big)=s\Big(\sum_i\varphi(m_i,n_i)\Big)$$
$$=\sum_i s\varphi(m_i,n_i)=\sum_i st(m_i,n_i)$$
$$=\sum_i s(m_i\otimes n_i)=\sum_i sm_i\otimes n_i,$$

同上面的议论，最后出现的 $sm_i\otimes n_i$ 是对 t 而言. 由上述得

$$\sigma\Big(s\Big(\sum_i m_i\otimes n_i\Big)\Big)=s\Big(\sigma\Big(\sum_i m_i\otimes n_i\Big)\Big),$$

因此 σ 是 S-同构. 同理可证 $T_2\cong M_2\otimes_R N$ 是 S-同构. ▌

如果命题 4.1.2 中的 N 是(R,H)-双模，则所得的同构还是右 H-模同构.

下面一个结果是以后经常要用的.

定理 4.1.4 设 R 是有单位元的环，N 是左 R-模，则

$$R\otimes_R N\cong N, \tag{16}$$

这是左 R-模同构.

证明 因为 R 可看成(R,R)-双模，所以 $R\otimes_R N$ 是左 R-模. 令 f：$(r,n)\mapsto rn$，易验证 f 是$R\times N$到 N 的平衡映射. 于是存在 $R\otimes_R N$到 N 的群同态 φ 使得 $f=\varphi t$. 于是有

$$\varphi(r\otimes n)=\varphi t(r,n)=f(r,n)=rn.$$

另一方面，令 ψ：$n\mapsto 1\otimes n$，易验证 ψ 是 N 到 $R\otimes_R N$ 的群同态. 显然，$\varphi\psi=1_N$. 又由于

$$\psi\varphi(r\otimes n)=\psi(rn)=1\otimes rn=1\cdot r\otimes n=r\otimes n,$$

因此 $\psi\varphi$ 是 $R\otimes_R N$ 的恒等变换. 从而 φ 是 $R\otimes_R N$ 到 N 上的群同构.

任给 $r\in R$, $\sum\limits_i r_i\otimes n_i\in R\otimes_R N$, 我们有

$$\varphi\Big(r\Big(\sum_i r_i\otimes n_i\Big)\Big)=\varphi\Big(\sum_i rr_i\otimes n_i\Big)=\sum_i\varphi(rr_i\otimes n_i)=\sum_i(rr_i)n_i,$$

$$r\Big(\varphi\Big(\sum_i r_i\otimes n_i\Big)\Big)=r\Big(\sum_i\varphi(r_i\otimes n_i)\Big)=r\sum_i r_in_i$$

$$=\sum_i r(r_in_i)=\sum_i(rr_i)n_i,$$

因此 φ 是 R-同构. ▌

注 若 N 是 (R,S)-双模, 则 $R\otimes_R N\cong N$ 还是右 S-模同构. 类似地, 若 M 是 (S,R)-双模, 则 $M\otimes_R R\cong M$ 既是右 R-模同构, 又是左 S-模同构.

定理4.1.5(张量积的结合律) 设 R, S 都是有单位元的环, L 是右 R-模, M 是 (R,S)-双模, N 是左 S-模, 则 $L\otimes_R M$ 是右 S-模, $M\otimes_R N$ 是左 R-模, 并且有群同构

$$(L\otimes_R M)\otimes_S N\cong L\otimes_R(M\otimes_S N). \tag{17}$$

进一步, 若 L 是 (H,R)-双模, 则此同构是左 H-模同构; 若 N 是 (S,H)-双模, 则此同构是右 H-模同构, 其中 H 是有单位元的环.

证明 参看[1] p. 67. ▌

由于域 K 上向量空间 M 可看成是 (K,K)-双模, 因此上述关于模的张量积的概念和性质可应用到向量空间上.

设 M 和 N 是域 K 上向量空间, 则 $M\otimes_K N$ 既是左 K-模, 又是右 K-模, 从而是 K 上向量空间, 其中数量乘法为:

$$k\Big(\sum m_i\otimes n_i\Big)=\sum km_i\otimes n_i=\sum m_i\otimes kn_i.$$

定理4.1.6 若 M 和 N 都是域 K 上有限维向量空间, 则 $M\otimes_K N$ 也是域 K 上有限维向量空间, 并且

$$\dim_K(M\otimes_K N)=(\dim_K M)\cdot(\dim_K N).$$

若 $m_1,m_2,\cdots,m_r$ 是 M 的一个 K-基; $n_1,n_2,\cdots,n_s$ 是 N 的一个 K-基, 则 $\{m_i\otimes n_j\mid i=1,2,\cdots,r;j=1,2,\cdots,s\}$ 是 $M\otimes_K N$ 的一个 K-

基.

证明 因为 $M=\langle m_1\rangle\oplus\langle m_2\rangle\oplus\cdots\oplus\langle m_r\rangle$，所以

$$M\otimes_K N\cong\langle m_1\rangle\otimes_K N\dotplus\langle m_2\rangle\otimes_K N\dotplus\cdots\dotplus\langle m_r\rangle\otimes_K N,$$

这是左 K-模同构，又是右 K-模同构，从而是向量空间的同构. 因为 $\langle m_i\rangle\cong K$，所以 $\langle m_i\rangle\otimes_K N\cong K\otimes_K N\cong N$，这是左 K-模同构，又是右 K-模同构，从而是向量空间的同构. 由上述得

$$M\otimes_K N\cong N\dotplus\cdots\dotplus N.$$

因此，

$$\dim_K(M\otimes_K N)=r(\dim_K N)=(\dim_K M)\cdot(\dim_K N).$$

因为

$$m\otimes n=\left(\sum_{i=1}^{r}a_i m_i\right)\otimes\left(\sum_{j=1}^{s}b_j n_j\right)=\sum_i\sum_j a_i b_j(m_i\otimes n_j),$$

所以 $\{m_i\otimes n_j\mid i=1,2,\cdots,r;j=1,2,\cdots,s\}$ 是 $M\otimes_K N$ 的一个 K-基. ▎

推论4.1.4 设 M 和 N 都是域 K 上向量空间，若 $m\neq0,n\neq0$，则在 $M\otimes_K N$ 中，$m\otimes n\neq0$.

证明 从 m 出发扩充成 M 的一个 K-基：$m,m_2,\cdots,m_r$；同理，设 $n,n_2,\cdots,n_s$ 是 N 的一个 K-基，则 $m\otimes n$ 是 $M\otimes_K N$ 的基元素之一，所以 $m\otimes n\neq0$. ▎

设 $M_i,M_i'(i=1,2)$ 都是域 K 上的向量空间，设 f_i：$M_i\to M_i'$ 是线性映射，$i=1,2$. 据定理4.1.2可知，存在 $M_1\otimes_K M_2$ 到 $M_1'\otimes_K M_2'$ 的群同态 $f_1\otimes f_2$，使得

$$(f_1\otimes f_2)(m_1\otimes m_2)=f_1(m_1)\otimes f_2(m_2).$$

容易验证 $f_1\otimes f_2$ 是向量空间 $M_1\otimes_K M_2$ 到 $M_1'\otimes_K M_2'$ 的线性映射.

设 M,N 是域 K 上向量空间，它们的一个 K-基分别是 $m_1,m_2,\cdots,m_r;n_1,n_2,\cdots,n_s$. 设 $\underline{A},\underline{B}$ 分别是 M,N 的线性变换. 则由上一段知道，$\underline{A}\otimes\underline{B}$ 是向量空间 $M\otimes_K N$ 的线性变换. 我们来讨论 $\underline{A}\otimes\underline{B}$ 在 $M\otimes_K N$ 的一个 K-基

$$\{m_1\otimes n_1,\cdots,m_1\otimes n_s,\cdots,m_r\otimes n_1,\cdots,m_r\otimes n_s\}$$

下的矩阵 C 与$\underline{A}$ 在基 $m_1,m_2,\cdots,m_r$ 下的矩阵 $A=(a_{ij})$和$\underline{B}$ 在基 $n_1,n_2,\cdots,n_s$ 下的矩阵 $B=(b_{ij})$之间的关系. 我们有

$$\begin{aligned}(\underline{A}\otimes\underline{B})(m_i\otimes n_j) &= \underline{A}(m_i)\otimes\underline{B}(n_j)\\ &= \left(\sum_{l=1}^{r}a_{li}m_l\right)\otimes\left(\sum_{k=1}^{s}b_{kj}n_k\right)\\ &= \sum_{l=1}^{r}\sum_{k=1}^{s}a_{li}b_{kj}(m_l\otimes n_k).\end{aligned}$$

把矩阵 C 分块：C 的行分成 r 组，每个组有 s 行；C 的列分成 r 组，每组有 s 列. 则 C 的(p,q)块为：

$$\begin{pmatrix} a_{pq}b_{11} & a_{pq}b_{12} & \cdots & a_{pq}b_{1s}\\ a_{pq}b_{21} & a_{pq}b_{22} & \cdots & a_{pq}b_{2s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{pq}b_{s1} & a_{pq}b_{s2} & \cdots & a_{pq}b_{ss}\end{pmatrix} = a_{pq}B,$$

从而

$$C=\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1r}B\\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2r}B\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{r1}B & a_{r2}B & \cdots & a_{rr}B\end{pmatrix}. \tag{18}$$

(18)式右端的矩阵是矩阵 A 与 B 的 Kronecker 积，记作 $A\otimes B$. 于是上面的讨论证明了：

命题4.1.3 设 M,N 是域 K 上向量空间，$\underline{A},\underline{B}$ 分别是 M,N 的线性变换，$\underline{A}$ 在 M 的基 $m_1,m_2,\cdots,m_r$ 下的矩阵为 A，$\underline{B}$ 在 N 的基 $n_1,n_2,\cdots,n_s$ 下的矩阵为 B，则向量空间 $M\otimes_K N$ 的线性变换$\underline{A}\otimes\underline{B}$ 在基$\{m_1\otimes n_1,\cdots,m_1\otimes n_s,\cdots,m_r\otimes n_1,\cdots,m_r\otimes n_s\}$下的矩阵是 A 与 B 的 Kronecker 积 $A\otimes B$. ▌

习 题 4.1

1. 证明 $\mathbf{Q}\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}_2=0$，其中 $\mathbf{Q}$ 是有理数域，$\mathbf{Z}_2=\mathbf{Z}/(2)$.

2. 设 R,S 都是有单位元的环，如果 M 是(S,R)-双模，证明：

$M\otimes_R R\cong M$ 是左 S-模同构，也是右 R-模同构.

3. 设 M,N 是域 K 上向量空间，$\underline{A},\underline{B}$ 分别是 M,N 的线性变换，$\underline{A}$ 在 M 的基 $m_1,m_2,\cdots,m_r$ 下的矩阵为 A，$\underline{B}$ 在 N 的基 $n_1,n_2,\cdots,n_s$ 下的矩阵为 B. 证明：向量空间 $M\otimes_K N$ 的线性变换 $\underline{A}\otimes\underline{B}$ 在基 $\{m_1\otimes n_1,\cdots,m_r\otimes n_1,\cdots,m_1\otimes n_s,\cdots,m_r\otimes n_s\}$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} Ab_{11} & Ab_{12} & \cdots & Ab_{1s} \\ Ab_{21} & Ab_{22} & \cdots & Ab_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Ab_{s1} & Ab_{s2} & \cdots & Ab_{ss} \end{pmatrix}.$$

§2 表示的张量积

现在我们给出从群 G 的两个已知表示构造新表示的一种方法：

设 (φ,V) 和 (ψ,W) 是群 G 的两个 K 表示，则 φ 是群 G 到 $\mathrm{GL}(V)$ 的群同态，ψ 是 G 到 $\mathrm{GL}(W)$ 的群同态. 我们首先作向量空间 V 和 W 的张量积 $V\otimes_K W$. 对于 $g\in G$，由于 $\varphi(g),\psi(g)$ 分别是 V,W 的可逆线性变换，因此 $\varphi(g)\otimes\psi(g)$ 是 $V\otimes_K W$ 的线性变换，易验证它是可逆的. 于是我们可规定 G 到 $\mathrm{GL}(V\otimes_K W)$ 的一个如下映射，记作 $\varphi\otimes\psi$：

$$(\varphi\otimes\psi)(g):=\varphi(g)\otimes\psi(g), \tag{1}$$

易验证 $\varphi\otimes\psi$ 保持乘法运算，因此 $\varphi\otimes\psi$ 是 G 的一个 K-表示，它的表示空间是 $V\otimes_K W$. 我们把 $(\varphi\otimes\psi,V\otimes_K W)$ 称为 G 的**表示** (φ,V) 和 (ψ,W) 的**张量积**，也称它是**张量积表示**.

当 V 和 W 是有限维时，我们把 (φ,V)，(ψ,W)，$(\varphi\otimes\psi,V\otimes_K W)$ 在相应的基下提供的矩阵表示分别记作 $\Phi,\Psi,\Phi\otimes\Psi$，则

$$(\Phi\otimes\Psi)(g)=\Phi(g)\otimes\Psi(g),\quad \forall g\in G.$$

从而 $\varphi\otimes\psi$ 提供的特征标 $\chi_{\varphi\otimes\psi}$ 为：

$$\begin{aligned}\chi_{\varphi\otimes\psi}(g)&=\mathrm{tr}[(\Phi\otimes\Psi)(g)]=\mathrm{tr}[\Phi(g)\otimes\Psi(g)]\\&=\mathrm{tr}(\Phi(g))\cdot\mathrm{tr}(\Psi(g))=\chi_\varphi(g)\cdot\chi_\psi(g)\end{aligned}$$

$$= (\chi_\varphi \chi_\psi)(g), \quad \forall g \in G.$$

由此得出 $\chi_{\varphi\otimes\psi} = \chi_\varphi \chi_\psi$. 这样我们证明了下述命题：

命题4.2.1 群 G 的两个有限维 K-表示(φ, V)和(ψ, W)的张量积$(\varphi \otimes \psi, V \otimes_K W)$提供的特征标等于 φ 的特征标与 ψ 的特征标的乘积. ▌

推论4.2.1 群 G 的两个特征标的乘积仍是 G 的特征标.

证明 由命题4.2.1立即得到. ▌

命题4.2.2 设 G 是有限群，K 是特征不能整除$|G|$的域. 则 G 的所有广义特征标组成的集合 char(G)是 G 的类函数环 $Cf_K(G)$的子环，它的单位元是 G 的主特征标 χ_0. 称 char(G)是 G 的**广义特征标环**.

证明 直接验证即得. ▌

设 φ, ψ 是 G 的两个不可约表示，张量积表示 $\varphi \otimes \psi$ 不一定不可约，但它可分解成一些不可约表示的直和，从中有可能得到与 φ, ψ 都不等价的不可约表示. 这样我们利用表示的张量积及其直和分解就可以从 G 的已知的不可约表示求得 G 的一些未知的不可约表示. 在下一节我们将从求交错群 A_5的复特征标表看到这一点.

习 题 4.2

1. 设(φ, V)是群 G 的1次 K-表示，(ψ, W)是 G 的 n 次不可约 K-表示，证明：$(\varphi \otimes \psi, V \otimes_K W)$是 G 的 n 次不可约 K-表示.

2. 已知有限群 G 的一个1次复特征标 χ_2和一个2次不可约复特征标 χ_4，它们在 G 的共轭类的代表元系$\{g_1 = 1, g_2, \cdots, g_7\}$上的值如下：

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
χ_2	1	1	1	ω^2	ω	ω^2	ω
χ_4	2	-2	0	-1	-1	1	1

其中 $\omega = e^{\frac{2\pi}{3}i}$，求 G 的复特征标表.

3. 设 $GL(n,q)$是域 $GF(q)$上的一般线性群，设 $n=n_1+n_2$，n_1 和 n_2都是正整数. 考虑 $GL(n,q)$的下述子群：

$$GL(n_1,n_2;q) := \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B & A_2 \end{pmatrix} \middle| A_i \in GL(n_i,q), B \in M_{n_2\times n_1}(q) \right\},$$

设 ψ_i 是 $GL(n_i,q)$的任一 m_i 次复表示，表示空间为 $V_i(i=1,2)$. 令

$$\psi:\ GL(n_1,n_2,q) \to GL(V_1 \otimes_C V_2),$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B & A_2 \end{pmatrix} \mapsto \psi_1(A_1) \otimes \psi_2(A_2).$$

(1) 证明：ψ 是 $GL(n_1,n_2,q)$的 m_1m_2次复表示，并且

$$\chi_\psi\left(\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B & A_2 \end{pmatrix}\right) = \chi_{\psi_1}(A_1)\cdot\chi_{\psi_2}(A_2);$$

(2) 如果 ψ_i 是 $GL(n_i,q)$的不可约复表示，$i=1,2$，证明：ψ 是 $GL(n_1,n_2,q)$的不可约复表示.

§3 绝对不可约表示，分裂域

我们曾经利用二面体群 D_6的几何意义求出了它的一个2次不可约实表示 φ，从 φ 出发能否得到 D_6的一个复表示?所得到的复表示是否仍然不可约?这一节我们就要来讨论这一类问题. 本节讨论的表示都是有限维的.

3.1 向量空间的基域的扩张

设 V 是域 K 上的向量空间，F 是 K 的扩域. 考虑

$$F\otimes_K V,$$

因为 F 可看成(F,K)-双模，V 是(K,K)-双模，所以 $F\otimes_K V$ 是左 F-模，从而它是域 F 上的向量空间，记作 V^F.

设 V 是 r 维的，它的一个 K-基是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$. 我们来求域 F 上向量空间 V^F 的维数和一个 F-基.

因为 $V\cong K\dotplus\cdots\dotplus K$，所以

$$F\otimes_K V\cong F\otimes_K K+\cdots+F\otimes_K K\cong F+\cdots+F,$$

这些都是左 F-模同构，从而是域 F 上向量空间的同构. 因此

$$\dim_F(F\otimes_K V)=r(\dim_F F)=r=\dim_K V.$$

因为对于 $f\in F, v\in V$，有

$$f\otimes v=f\otimes\left(\sum_{i=1}^{r}k_i\alpha_i\right)=\sum_{i=1}^{r}(f\otimes k_i\alpha_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{r}(fk_i\otimes\alpha_i)=\sum_{i=1}^{r}fk_i(1\otimes\alpha_i),$$

所以 $\{1\otimes\alpha_i \mid i=1,2,\cdots,r\}$ 是 V^F 的一个 F-基. 这样我们证明了下面的命题：

命题4.3.1 设 V 是域 K 上的向量空间，F 是 K 的扩域，则 $F\otimes_K V$ 是域 F 上的向量空间，记作 V^F. 如果 V 是 r 维的，其一个 K-基为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$，则 V^F 也是 r 维，并且 $1\otimes\alpha_1,1\otimes\alpha_2,\cdots,1\otimes\alpha_r$ 是 V^F 的一个 F-基. ▌

考虑 V^F 的子集 $V_1^F:=\left\{\sum_{i=1}^{r}k_i(1\otimes\alpha_i) \mid k_i\in K, i=1,2,\cdots,r\right\}$，易看出 V_1^F 是域 K 上的向量空间. 考虑映射

$$\psi: V\to V_1^F,$$

$$\sum k_i\alpha_i\mapsto\sum k_i(1\otimes\alpha_i),$$

显然 ψ 是满射，单射，并且保持加法和数量乘法，因此 ψ 是域 K 上向量空间 V 到 V_1^F 上的同构. 从而可把 V 与 V_1^F 等同. 即，把 V 看成 V^F 的子集(注意不能把 V 看成 V^F 的子空间，因为 V_1^F 不是 V^F 的子空间). 此时可以把 α_i 与 $1\otimes\alpha_i$ 等同，$i=1,2,\cdots,r$. 因此 V^F 的每一个元素可唯一表示成形式 $\sum_{i=1}^{r}f_i\alpha_i$，其中 $f_i\in F, i=1,2,\cdots,r$.

设 $\underline{A}$ 是域 K 上向量空间 V 的线性变换，它在 V 的一个 K-基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 下的矩阵为 $A=(a_{ij})$. 对于 V^F 的任一元素 $\sum_i f_i\alpha_i$，规定

$$\underline{A}^F\left(\sum_i f_i\alpha_i\right):=\sum_i f_i\underline{A}(\alpha_i),\tag{1}$$

易验证$\underline{A}^F$是V^F的线性变换，并且易看出$\underline{A}^F$在V^F的一个F-基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$下的矩阵是$A$，此时是把$A$看成域$F$上的矩阵. 从而映射$\underline{A}\mapsto\underline{A}^F$给出了$\mathrm{GL}(V)$到$\mathrm{GL}(V^F)$的单同态.

现在设(φ,V)是群G的一个K-表示，F是K的扩域. 对于$g\in G$，$\varphi(g)$是V的可逆线性变换，据上一段知，$\varphi(g)^F$是V^F的可逆线性变换. 令

$$\varphi^F:G\to\mathrm{GL}(V^F),$$
$$g\mapsto\varphi(g)^F,$$

由于φ是G到$\mathrm{GL}(V)$的群同态，并且$\underline{A}\mapsto\underline{A}^F$是$\mathrm{GL}(V)$到$\mathrm{GL}(V^F)$的群同态，因此$\varphi^F$是$G$到$\mathrm{GL}(V^F)$的群同态，从而$\varphi^F$是$G$的一个$F$-表示，其表示空间为$V^F$. 这样我们从群$G$的一个$K$-表示$\varphi$得到了$G$在$K$的扩域$F$上的一个表示$\varphi^F$.

在V中取一个K-基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$，设$\varphi$在这个基下提供的矩阵表示为$\Phi$. 设$\varphi^F$在$V^F$的$F$-基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$下提供的矩阵表示为$\Phi^F$. 据前面所述知，$\Phi^F(g)$与$\Phi(g)$是同一个矩阵，只是前者看成域$F$上矩阵，而后者是域$K$上矩阵. 由此得到$\varphi^F$提供的特征标$\chi_{\varphi^F}$与$\varphi$提供的特征标$\chi_\varphi$有如下关系：

$$\chi_\varphi^F(g)=\chi_\varphi(g),\quad\forall\, g\in G,\tag{2}$$

只是χ_{φ^F}看成G的F值函数，而χ_φ是G的K值函数. 这样我们从群G的一个K-特征标χ_φ可以立即写出G的一个F-特征标χ_φ^F. 问题是：如果χ_φ不可约，那么χ_φ^F是否不可约?我们看下面的例子：

例4.3.1 设$G=\langle a\rangle$是3阶循环群，在例2.3.4中，我们已求出G的一个2次不可约实表示φ，它提供的矩阵表示Φ为：

$$\Phi(a)=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\end{pmatrix},\quad\Phi(a^2)=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}.$$

由此得出$\chi_\varphi(a)=-1,\chi_\varphi(a^2)=-1,\chi_\varphi(1)=2$. 从$G$的实表示$\varphi$可得到$G$的复表示$\varphi^C$，它提供的特征标$\chi_\varphi^C$在$G$的元素上的函数值可立即写出：$\chi_\varphi^C(a)=-1,\chi_\varphi^C(a^2)=-1,\chi_\varphi^C(1)=2$. 由于

$$(\chi_\varphi^C,\chi_\varphi^C)=\frac{1}{3}\sum_{g\in G}\chi_\varphi^C(g)\chi_\varphi^C(g^{-1})$$
$$=\frac{1}{3}[2^2+(-1)(-1)+(-1)(-1)]=2,$$

据定理3.2.5得，χ_φ^C 可约. 在例1.3.2中也说明了 φ^C 可约.

例4.3.1说明：当向量空间的基域扩张时可能失去表示的不可约性.

例4.3.2 对于对称群 S_4，我们在例2.3.3中曾利用它与正方体的旋转对称群同构得到 S_4的一个3次不可约实表示 ψ，它提供的特征标 χ_ψ 为：

	(1)	(12)	(12)(34)	(123)	(1234)
χ_ψ	3	-1	-1	0	1

由 ψ 可得到 S_4的一个3次复表示 φ^C，它提供的特征标 χ_φ^C 满足 $\chi_\psi^C(g)=\chi_\psi(g)$，$\forall\, g\in S_4$. 因为

$$(\chi_\psi^C,\chi_\psi^C)=\frac{1}{24}[3^2+6\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)^2+8\cdot 0^2+6\cdot 1^2]=1,$$

所以 φ^C 不可约.

例4.3.3 求交错群 A_5的复特征标表.

解 因为 A_5是单群，所以 $A_5'=A_5$. 从而 A_5只有一个1次复表示 φ_1，它是主表示.

A_5有5个共轭类，其代表元分别为：(1)，(12)(34)，(123)，(12345)，(13524). 各个共轭类的元素数目依次为：1，15，20，12，12. 于是 A_5有5个不可约复特征标.

因为 A_5是双传递群，所以它有一个4次不可约复表示 φ_2，其特征标 χ_2在 A_5的上述5个共轭类的代表元上取值为

$$(4,0,1,-1,-1).$$

考虑几何意义. 正二十面体(简记作$\triangle_{20}$)的旋转对称群记作 G. 显然，以完全相对的两个顶点的连线为轴转角为$2\pi/5$的旋转是 G 中元素(因为$\triangle_{20}$的顶点是正十二面体$\triangle_{12}$的中心，并且$\triangle_{12}$的面

是正五边形)．由于$\triangle_{20}$有12个顶点，因此这样的轴有6根，相应的旋转记作$\alpha_i(i=1,2,\cdots,6)$．显然$\alpha_i^5=1$，因此G中有24个5阶元．以$\triangle_{20}$的完全相对的两个面的中心连线为轴转$2\pi/3$的旋转也是G中元素(因为$\triangle_{20}$的面是正三角形)．$\triangle_{20}$有20个面，于是这样的轴有10根，相应的旋转记作β_i，$1\leqslant i\leqslant 10$．显然$\beta_i^3=1$，因此G中有20个3阶元．以$\triangle_{20}$的完全相对的两条棱的中点连线为轴转角为π的旋转也是G中元素，$\triangle_{20}$有30条棱(因为据欧拉定理，顶点数＋面数＝棱数＋2)，于是这样的轴有15根，相应的旋转记作γ_i，$1\leqslant i\leqslant 15$．因此G中有15个2阶元．从而$|G|=60$．

正二十面体$\triangle_{20}$的20个面的中心组成一个正十二面体$\triangle_{12}$，因此$\triangle_{20}$的旋转对称群G也是$\triangle_{12}$的旋转对称群．不难看出，正十二面体镶嵌着5个正方体，其中每一个正方体决定$\triangle_{12}$的6条棱，它们与这个正方体的棱或者平行或者垂直．这样我们可以把$\triangle_{12}$的30条棱分别记为1，2，3，4，5，使得有同一记号i的6条棱对应于第i个镶嵌的正方体．正十二面体的每个面的5条棱恰好有1，2，3，4，5这5个不同的记号．易看出，$\triangle_{12}$的旋转对称群G作用在由这5个正方体组成的集合$\Omega=\{1,2,3,4,5\}$上．于是G到S_5有一个同态，此同态的核显然是单位子群，于是G同构于S_5的一个子群．由于$|G|=60=|A_5|$，所以$G\cong A_5$．这样A_5到G的这个同构映射便给出了A_5的一个3次实表示φ，显然φ不可约．以$\triangle_{20}$的中心为原点，对于G中每一个旋转，以转轴方向为e_3建立直角坐标系$[O;e_1,e_2,e_3]$，则此旋转在这个基e_1,e_2,e_3下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

其中θ为转角．因此该旋转的迹为$1+2\cos\theta$．从而χ_φ的值为：

$$\chi_\varphi((12)(34)) = 1 + 2\cos\pi = -1,$$

$$\chi_\varphi((123)) = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{3} = 0,$$

$$\chi_\varphi((12345))=1+2\cos\frac{2\pi}{5}=1+2\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

$$\chi_\varphi((13524)=1+2\cos\frac{4\pi}{5}=1-2\cos 36^\circ$$

$$=1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

把 φ 经过向量空间的基域的扩张得到 φ^C，它提供的特征标 χ_φ^C 满足 $\chi_\varphi^C(g)=\chi_\varphi(g)$，$\forall\ g\in A_5$，从而由上述得 χ_φ^C 在 A_5 的共轭类上的值为

$$\left(3,-1,0,\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}),\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right).$$

因为

$$(\chi_\varphi^C,\chi_\varphi^C)=\frac{1}{60}\Big[3^2+15\cdot(-1)^2+20\cdot 0^2$$

$$+12\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+12\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\Big]=1,$$

所以 φ^C 不可约. 把 φ^C 记作 φ_3，χ_φ^C 记作 χ_3.

χ_3^2 的值为 $\left(9,1,0,\frac{1}{2}(3+\sqrt{5}),\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})\right)$，$\chi_3^2$ 仍为 A_5 的复特征标. 易算出 $(\chi_3^2,\chi_1)=1$，$(\chi_3^2,\chi_3)=1$. 这说明 φ_1 在 $\varphi_3\otimes\varphi_3$ 中出现1次，φ_3 在 $\varphi_3\otimes\varphi_3$ 中也出现1次. 从而 $\mu=\chi_3^2-\chi_1-\chi_3$ 仍为 A_5 的复特征标. 易算出 μ 的值为

$$(5,1,-1,0,0).$$

因为

$$(\mu,\mu)=\frac{1}{60}[5^2+15\cdot 1^2+20\cdot(-1)^2+12\cdot 0^2+12\cdot 0^2]$$

$$=1,$$

所以 μ 不可约，把 μ 记作 χ_4.

A_5 的第5个不可约复特征标 χ_5 的次数 m 应满足

$$1^2+4^2+3^2+5^2+m^2=60,$$

由此得出 $m=3$. 利用第二正交关系可求出 χ_5的值，从而完成 A_5的复特征标表如下：

	(1)	(12)(34)	(123)	(12345)	(13524)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	4	0	1	1	-1
χ_3	3	-1	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
χ_4	5	1	-1	0	0
χ_5	3	1	0	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

3.2 绝对不可约表示和分裂域的定义

定义1 群 G 的不可约 K-表示(φ,V)称为**绝对不可约**，如果对于 K 的每一个扩域 F 都有(φ^F,V^F)是 G 的不可约 F-表示.

定义2 域 K 称为群 G 的**分裂域**，如果 G 的每一个不可约 K-表示都是绝对不可约的.

群 G 的一个不可约 K-表示 φ，如何判定它是不是绝对不可约的？群 G 的分裂域是否存在？由于 G 的 K-表示(φ,V)由域 K 上的群代数 $K[G]$上的左模 V 决定，所以我们来给出代数上的左模是绝对不可约的定义及不可约左模是绝对不可约的判别条件.

设 A 是域 K 上的代数，F 是 K 的扩域. 令

$$A^F := F\otimes_K A,$$

由于 A 是域 K 上向量空间，因此 A^F 是域 F 上的向量空间. 当 A 是有限维时，有 $\dim_F(A^F)=\dim_K A$；并且若 A 的一个 K-基是 α_1，$\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，则 A^F 的一个 F-基是$1\otimes\alpha_1,1\otimes\alpha_2,\cdots,1\otimes\alpha_n$. 可以把$1\otimes\alpha_i$与 α_i 等同. 于是 A^F 的每一个元素可唯一表成 $\sum_{i=1}^{n} l_i\alpha_i$，其中 $l_i\in F$，$i=1,2,\cdots,n$.

当 A 是无限维代数时，设 A 的一个 K-基是$\{\alpha_i\,|\,i\in I\}$，其中 I 是下标集. 由于 A 的每个元素可以由有限多个基元素 K-线性表

出，所以 A^F 的每个元素可表成有限和 $\sum_j l_j(1\otimes\alpha_j)$，其中 $l_j\in F$. 从集合 $\{1\otimes\alpha_i\mid i\in I\}$ 中任取有限多个元素 $1\otimes\alpha_{i_1},1\otimes\alpha_{i_2},\cdots,1\otimes\alpha_{i_n}$，因为 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_n}$ 是 K-线性无关的，所以它们是 A 的子空间 $A_1=\langle\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_n}\rangle$ 的一个 K-基，从而 $F\otimes_K A_1$ 的一个 F-基是 $1\otimes\alpha_{i_1},\cdots,1\otimes\alpha_{i_n}$. 这说明集合

$$\{1\otimes\alpha_i\mid i\in I\}$$

中任意有限多个元素是 F-线性无关的，从而此集合是 A^F 的一个 F-基. 于是 A^F 的每个元素表成有限和 $\sum_j l_j(1\otimes\alpha_j)$ 的表法是唯一的. 同样可把 $1\otimes\alpha_i$ 与 α_i 等同.

无论 A 是有限维还是无限维代数，我们可以在 A^F 中定义乘法如下：

$$\Big(\sum_j l_j\alpha_j\Big)\Big(\sum_i h_i\alpha_i\Big)\coloneqq\sum_j\sum_i l_jh_i\alpha_j\alpha_i. \tag{3}$$

易验证 A^F 成为一个环，并且其单位元为 $1\otimes1_A$，由于 1_A 可作为 A 的 K-基的一个元素，于是 $1\otimes1_A$ 可与 1_A 等同. 综上述，A^F 成为域 F 上的代数.

设 M 是左 A-模，A 是域 K 上的代数，F 是 K 的扩域. 由于 M 也是域 K 上向量空间，于是 $M^F\coloneqq F\otimes_K M$ 是域 F 上向量空间. 设 M 的一个 K-基为 $m_1,m_2,\cdots,m_s$，则 M^F 的一个 F-基是 $m_1,m_2,\cdots,m_s$(已经把 $1\otimes m_i$ 与 m_i 等同). 于是 M^F 中每一个元素可唯一地表成 $\sum_{j=1}^{s}\lambda_jm_j,\lambda_j\in F$. 又由上述，$A^F$ 中每个元素可唯一表成形式 $\sum_i l_i\alpha_i$ (有限和)，因此我们可以定义

$$\Big(\sum_i l_i\alpha_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{s}\lambda_jm_j\Big)=\sum_i\sum_j l_i\lambda_j(\alpha_im_j),$$

易验证 M^F 成为左 A^F-模.

定义3 设 A 是域 K 上的代数，一个不可约左 A-模 M 称为**绝对不可约**，如果对于 K 的每一个扩域 F 都有 M^F 是不可约左

A^F-模.

定义4 域 K 的一个扩域 F 称为 K 上代数 A 的**分裂域**,如果每一个不可约左 A^F-模是绝对不可约的.

为了讨论一个不可约左 A-模是绝对不可约的条件,我们需要一些概念和结果.

3.3 具有极小条件环的根

定义5 环 R 的元素 x 称为**幂零的**,如果存在一个正整数 m 使得 $x^m=0$. 环 R 的左理想(或双边理想)I 称为**幂零的**,如果存在正整数 n 使得 $I^n=0$.

容易看出,若 I 是环 R 的幂零左理想,则 I 的每个元素是幂零元. 反之不一定成立.

定义6 环 R 称为**具有极小条件的环**,如果 R 的左理想满足降链条件,即,R 的每一条左理想的降链仅包含有限多个不同的左理想.

命题4.3.2 域 K 上有限维代数是具有极小条件的环.

证明 设 A 是域 K 上有限维代数. 由于 A 的左理想是左正则 A-模 A 的子模,从而是域 K 上的向量空间. 即,A 的左理想是向量空间 A 的子空间. 因为有限维向量空间的子空间满足降链条件,所以 A 是具有极小条件的环. ▌

命题4.3.3 设 I 是具有极小条件的环 R 的左理想,如果 I 的每个元素是幂零的,则 I 是幂零的.

证明 考虑一条左理想的降链:

$$I\supset I^2\supset I^3\supset\cdots\supset I^m\supset\cdots.$$

由于 R 是具有极小条件的环,所以存在正整数 n 使得 $I^n=I^{n+1}$. 记 $J=I^n$,则 $J^2=J$. 我们来证 J 是幂零的,从而 I 是幂零的.

假如 J 不是幂零的,考虑偏序集合

$$S=\{L\mid L\text{ 是 }R\text{ 的左理想},L\subset J,JL\neq 0\}.$$

因为 $J\in S$,所以 S 非空. 在 S 中任取一条降链

$$L_1 \supset L_2 \supset L_3 \supset \cdots. \tag{4}$$

由于这是 R 的左理想的降链，而 R 是具有极小条件的环，因此存在正整数 m 使得 $L_m = L_{m+1} = L_{m+2} = \cdots$，从而链(4)在 S 中有下界. 据 Zorn 引理，S 有极小元素 L^*. 因为 $JL^* \neq 0$，所以存在 $x \in L^*$ 使得 $Jx \neq 0$. 显然 Jx 是 R 的左理想. 因为 $L^* \subset J$. 所以 $Jx \subset J$. 显然 $J(Jx) \neq 0$(因为 $J^2 = J$). 这些说明 $Jx \in S$. 由于 L^* 是 S 的极小元，并且 $Jx \subset L^*$，因此得到 $Jx = L^*$. 于是 L^* 中任一元素形如 ax，其中 $a \in J$. 由于 $x \in L^*$，所以存在 $b \in J$ 使得 $x = bx$. 从而 $bx = b^2x$. 由此得到 $x = bx = b^2x = b^3x = \cdots$. 这表明 b 不是幂零元，这与 I 的每个元素是幂零元的假设矛盾. 所以 J 是幂零的. ▌

定义7 设 R 是具有极小条件的环，R 的所有幂零左理想的和称为 R 的**根**，记作 $\mathrm{rad}R$.

命题4.3.4 设 R 是具有极小条件的环，则 R 的根 $\mathrm{rad}R$ 是 R 的幂零双边理想.

证明 显然 $\mathrm{rad}R$ 是 R 的左理想. 设 N_1、N_2是 R 的幂零左理想，$N_i^{m_i} = 0$，$i = 1, 2$. 在 $N_1 + N_2$中任取一个元素 $a_1 + a_2$，其中 $a_i \in N_i$. 因为$(a_1 + a_2)^{m_1 + m_2} = (a_1 + a_2)(a_1 + a_2)\cdots(a_1 + a_2)$，展开后每一项中，或者 a_1出现的次数大于 m_1，或者 a_2出现的次数大于 m_2. 若为前者，则从 $N_1^{m_1} = 0$可推出该项为0；若为后者，同理该项为0. 因此 $a_1 + a_2$是幂零元. 从而 $N_1 + N_2$是幂零的. 容易将这推广成：R 的有限多个幂零左理想的和是幂零的. 由于 $\mathrm{rad}R$ 的每一个元素 x 是属于 R 的有限多个幂零左理想的和，从而 x 是幂零元. 仍据命题4.3.3即得 $\mathrm{rad}R$ 是幂零的.

显然$(\mathrm{rad}R)R$ 是 R 的双边理想. 对每个 i，有

$$((\mathrm{rad}R)R)^i = (\mathrm{rad}R)R(\mathrm{rad}R)R\cdots(\mathrm{rad}R)R \subset (\mathrm{rad}R)^iR,$$

因此$(\mathrm{rad}R)R$ 是幂零的. 据 $\mathrm{rad}R$ 的定义得$(\mathrm{rad}R)R \subset \mathrm{rad}R$. 又显然$(\mathrm{rad}R)R \supset \mathrm{rad}R$. 由此得出$(\mathrm{rad}R)R = \mathrm{rad}R$. 这说明 $\mathrm{rad}R$ 是双边理想. ▌

命题4.3.5 设 R 是具有极小条件的环，则商环 $R/\mathrm{rad}R$不包

含幂零左理想，除了零理想以外.

证明 商环 $R/\mathrm{rad}R$的左理想形如 $I/\mathrm{rad}R$，其中 I 是 R 的左理想并且 $I\supset\mathrm{rad}R$. 记 $N=\mathrm{rad}R$. 显然 I/N 是幂零的当且仅当存在正整数 m 使得 $I^m\subset N$. 因为 N 是幂零的，所以它的每个元素是幂零元，从而 I^m 的每个元素是幂零的，因此 I^m 是幂零的，于是 I 是幂零的，由此推出 $I\subset N$. 从而 $I=N$. 因此 I/N 是零理想. ▌

定义8 设 R 是具有极小条件的环，如果 $\mathrm{rad}R=0$，则称 R 是**半单环**.

推论4.3.1 设 R 是具有极小条件的环，则 $R/\mathrm{rad}R$是半单环.

证明 因为 R 是具有极小条件的环，所以 $R/\mathrm{rad}R$也是. 然后由命题4.3.5立即得出 $R/\mathrm{rad}R$是半单环. ▌

命题4.3.6 设 R 是具有极小条件的环，则 R 的每一个非幂零的左理想 I 包含一个幂等元.

证明 因为 R 是具有极小条件的环，所以 R 的左理想的非空集合对于集合的包含关系所成的偏序集有极小元素（利用 Zorn 引理）. 现在考虑 R 的被包含在 I 里的非幂零左理想的集合，显然它非空（因为 I 在此集合里），于是它有极小元素 I_1. 这意味着 R 的任意一个真包含在 I_1里的左理想必定是幂零的. 现在 I_1^2是非幂零左理想并且 $I_1^2\subset I_1$，因此 $I_1^2=I_1$. 其次考虑偏序集合

$$S=\{L\mid L\text{ 是 }R\text{ 的左理想},L\subset I_1,I_1L\neq 0\}.$$

因为 $I_1\in S$，所以 S 非空. 从而 S 有极小元素 L_1. 因为 $I_1L_1\neq 0$，所以存在 $x\in L_1$使得 $I_1x\neq 0$. 显然 I_1x 是 R 的左理想. 因为 $I_1x\subset L_1\subset I_1$，并且 $I_1(I_1x)=I_1^2x=I_1x\neq 0$，所以 $I_1x\in S$. 由 L_1的极小性得出：$I_1x=L_1$. 于是 L_1的元素形如 bx，其中 $b\in I_1$. 因为 $x\in L_1$，所以存在 $a\in I_1$使得 $x=ax$. 从而

$$x=ax=a^2x=\cdots.$$

这表明 a 不是幂零元，并且 $(a^2-a)x=0$. 令

$$N=\{u\in I_1\mid ux=0\}\subset I_1.$$

因为 $I_1x=L_1\neq 0$，所以 N 是真包含在 I_1 里的左理想，从而 N 是幂零的. 令 $n_1=a^2-a\in N$. 如果 $n_1=0$，则 a 是幂等元并且 $a\in I_1\subset I$. 如果 $n_1\neq 0$，则令

$$a_1 = a + n_1 - 2an_1 \in I_1.$$

由于 $n_1=a^2-a$，所以 a_1，a 和 n_1 可互相交换(指乘法运算). 于是如果 a_1 是幂零的，则 $a=a_1-n_1+2an_1$ 也是幂零元. 因此 a_1 是非幂零元. 直接计算得到

$$a_1^2 - a_1 = 4n_1^3 - 3n_1^2.$$

于是 $a_1^2-a_1\in N$. 因为 N 是幂零左理想，所以 $a_1^2-a_1$ 是幂零元. 从上式还看出 $a_1^2-a_1$ 包含因子 n_1^2，并且与 a_1 可交换. 记 $n_2=a_1^2-a_1$. 递归地，我们能在 I_1 中相继构造非幂零元 $a_1,a_2,\cdots$ 使得 $a_i^2-a_i$ 包含因子 $n_1^{2^i}$. 因为 n_1 是幂零元，所以对于足够大的整数 i 可以使 $n_1^{2^i}=0$，从而 $a_i^2=a_i$，此时 a_i 是幂等元. ▌

设 A 是域 K 上的有限维代数，则 A 是具有极小条件的环. 如果 $\mathrm{rad}A=0$，则 A 是半单环. 在第二章 § 2中我们曾经给出过半单代数的定义：域 K 上有限维代数 A 称为半单的，如果每一个左 A-模是完全可约的. 这两者有什么联系呢?根据下面将要证明的命题4.3.7和第二章的命题2.2.1便知道，这两个定义是等价的.

命题4.3.7 设 R 是具有极小条件的环，则 $\mathrm{rad}R=0$ 的充分必要条件是左正则 R-模 R 是完全可约的.

证明 *必要性* 设 L_1 是 R 的一个极小左理想. 因为 $\mathrm{rad}R=0$，所以 L_1 是非幂零的. 据命题4.3.6，L_1 包含一个幂等元 e. 因为 Re 是 R 的左理想，并且 $Re\subset L_1$，所以 $Re=L_1$. 任取 $x\in L_1$，设 $x=be$，其中 $b\in R$. 因为 $xe=(be)e=be^2=be$，所以 $xe=x$. 于是 $L_1=\{x\in R\,|\,xe=x\}$. 令

$$L_1' = R(1 - e).$$

任意 $y\in L_1'$，设 $y=a(1-e)$，则 $ye=a(1-e)e=a(e-e^2)=0$. 于是 $L_1'=\{y\in R\,|\,ye=0\}$. 显然 L_1' 是 R 的左理想，并且易看出 $L_1\cap L_1'$

$=(0)$. 因为 R 中每个元素 x 可表成

$$x = xe + x(1-e),$$

所以 $R=L_1\oplus L_1'$. 如果 $L_1'\neq(0)$, 则 L_1' 包含 R 的一个极小左理想 L_2. 于是 $L_1'=L_2\oplus L_2'$, 其中 L_2' 是 R 的某个左理想. 重复这个过程, 得到左理想的严格降链

$$L_1' \supset L_2' \supset \cdots.$$

因为 R 是具有极小条件的环, 这条链必然终止于(0). 于是 $R=L_1\oplus L_2\oplus\cdots\oplus L_n$, 据习题2.2的第3题, 这说明左正则 R-模 R 是完全可约的.

充分性　设 $N=\mathrm{rad}R$. 因为左正则 R-模 R 是完全可约的, 所以存在 R 的左理想 N' 使得 $R=N\oplus N'$. 假如 $N\neq(0)$, 则据引理2.2.1得: $1=e_1+e_2$, 其中 $e_1\in N, e_2\in N'$, 并且 e_1 是幂等元, 于是 $e_1=e_1^2=e_1^3=\cdots$, 从而对任意正整数 m 都有 $e_1^m=e_1\neq0$. 但是 $e_1\in N$ 并且 N 是幂零理想, 于是 e_1 为幂零元, 矛盾. 所以 $N=(0)$. ▌

现在我们从另一角度来刻画 $\mathrm{rad}A$, 其中 A 是具有极小条件的环.

设 M 是左 A-模, 令

$$\mathrm{ann}(M) := \{a\in A \mid ax=0, \forall\, x\in M\},$$

称 $\mathrm{ann}(M)$ 是 M 的**零化子**. 显然 $\mathrm{ann}(M)$ 是 A 的双边理想. 如果 $\mathrm{ann}(M)=(0)$, 则称 M 是**忠实的**.

命题4.3.8　设 A 是具有极小条件的环, 则

$$\mathrm{rad}A = \bigcap_M \mathrm{ann}(M),$$

其中 M 跑遍不可约左 A-模.

证明　任取 $b\in\bigcap_M \mathrm{ann}(M)$, 其中 M 跑遍不可约左 A-模. 记 $\overline{A}=A/\mathrm{rad}A$, 据推论4.3.1, $\overline{A}$ 是半单环. 任取一个不可约左 $\overline{A}$-模 M, 规定 $ax:=\bar{a}x, \forall\, x\in M, a\in A$, 则 M 成为左 A-模. 假如 M 作为左 A-模可约, 则 M 有一个非平凡的子模 M_1, 由于 $\forall\, y\in M_1$ 有 $\bar{a}y=ay\in M_1$, 所以 M_1 是左 $\overline{A}$-模 M 的子模, 这与 M 是不可约左

$\overline{A}$-模矛盾. 因此 M 作为左 A-模仍不可约. 于是 $b\in\text{ann}(M)$，即 $bM=0$. 由于 $\overline{A}$ 是半单环，据命题4.3.7知，左正则 $\overline{A}$-模 $\overline{A}$ 是完全可约的，从而 $\overline{A}$ 可分解成不可约左 $\overline{A}$-模的直和，因此 $b\overline{A}=0$. 从而有 $0=b\,\overline{1}=\overline{b}$，因此 $b\in\text{rad}A$.

反之，任取 $c\in\text{rad}A$，任取一个不可约左 A-模 M，要证 $cM=0$. 容易看出 $(\text{rad}A)M$ 是 M 的子模. 由于 M 不可约，便可得到 $(\text{rad}A)M=0$ 或者 $(\text{rad}A)M=M$. 假如为后者，则得

$$M=(\text{rad}A)M=(\text{rad}A)^2M=\cdots.$$

因为 $\text{rad}A$ 是幂零的，由上式推出 $M=0$，矛盾. 所以 $(\text{rad}A)M=0$. 于是 $cM=0$. ▌

推论4.3.2 设 A 是域 K 上有限维代数，则 A 是半单的当且仅当 $\bigcap\text{ann}(M)=0$，其中 M 跑遍不可约左 A-模.

命题4.3.9 设 A 是域 K 上有限维代数，如果 A 有一个忠实的不可约左模，则 A 是单代数.

证明 设 M 是忠实的不可约左 A-模，则 $\text{ann}(M)=0$. 据命题4.3.8得 $\text{rad}(A)=0$. 从而 A 是半单代数. 从定理2.2.3知道：$A=A_1\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_s$，$1=e_1+e_2+\cdots+e_s$，其中 $\{e_1,e_2,\cdots,e_s\}$ 是 A 的全部中心本原幂等元，并且 $A_i=Ae_i$ 是单环，它的单位元是 $e_i(i=1,2,\cdots,s)$. 于是得到

$$M=1\cdot M=e_1M+e_2M+\cdots+e_sM.$$

因为 $e_i\in Z(A)$，所以 $a(e_ix)=(ae_i)x=(e_ia)x=e_i(ax)\in e_iM$，$\forall\, a\in A$，$x\in M$. 从而 e_iM 是 M 的子模，$i=1,2,\cdots,s$. 因为 $e_1,e_2,\cdots,e_s$ 两两正交，所以 $M=e_1M\oplus e_2M\oplus\cdots\oplus e_sM$. 因为 M 不可约，所以存在唯一的 j 使得 $e_jM=M$，其余 $e_iM=0$ 当 $i\neq j$. 假如 $s>1$，则当 $i\neq j$ 时，$e_i\in\text{ann}(M)$，这与 M 是忠实的矛盾. 所以 $s=1$. 这说明 A 是单代数. ▌

3.4 绝对不可约表示和分裂域的判定

现在我们可以得到域 K 上有限维代数 A 的不可约左模是绝

对不可约的充分必要条件了：

定理4.3.1 设 A 是域 K 上有限维代数，M 是不可约左 A-模，并且 $\dim_K M<\infty$，则 M 是绝对不可约的充分必要条件是

$$\mathrm{Hom}_A(M,M)\cong K. \tag{5}$$

证明 设 $D=\mathrm{Hom}_A(M,M)$。由于 M 不可约，所以 D 是除环。在定理2.2.4的(i)的证明过程中已证 D 可成为域 K 上有限维向量空间，M 是除环 D 上右向量空间，并且有

$$\dim_K M=(\dim_K D)\cdot(\dim_D M). \tag{6}$$

对于 $a\in A$，令 a_L: $x\mapsto ax$，$\forall\ x\in M$。易验证 a_L 是域 K 上向量空间 M 的线性变换。令 $A_L=\{a_L\mid a\in A\}$，易看出 A_L 是域 K 上代数，并且 $A_L\subset\mathrm{Hom}_K(M,M)$。因为 $\dim_K M<\infty$，所以 $\dim_K A_L<\infty$。容易看出 $a\mapsto a_L$ 是 A 到 A_L 的代数同态。显然 M 也是左 A_L-模，并且 M 作为 A_L-模也是不可约的。若 $a_L\in\mathrm{ann}(M)$，则对一切 $x\in M$ 有 $a_Lx=0$，从而线性变换 a_L 是零变换，即 $a_L=0$，所以 $\mathrm{ann}(M)=0$，于是 M 作为 A_L-模是忠实的。据命题4.3.9得：A_L 是单代数。

设 σ 是 M 到 M 的群同态，因为

$$\sigma(ax)=a\sigma(x)\Longleftrightarrow\sigma(a_Lx)=a_L\sigma(x),$$

所以 $\mathrm{Hom}_A(M,M)=\mathrm{Hom}_{A_L}(M,M)$。为简便起见，记 $B=A_L$。

据定理2.2.4(Wedderburn)得

$$B=A_L\cong\mathrm{Hom}_D(M,M)\cong M_n(D), \tag{7}$$

其中 $n=\dim_D M$。

必要性 设 M 是绝对不可约的。取 K 的一个扩域 F 使得 F 是代数封闭的。于是 M^F 是不可约左 A^F-模。容易看出 M^F 作为左 B^F-模也是不可约的。由于 B^F 里的元素是域 F 上向量空间 M^F 的线性变换，所以 $\mathrm{ann}(M^F)=0$，从而 M^F 作为 B^F-模是忠实的。于是据命题4.3.9得：B^F 是单代数。令

$$D^*=\mathrm{Hom}_{B^F}(M^F,M^F), \tag{8}$$

据 Wedderburn 定理得

$$B^F\cong\mathrm{Hom}_{D^*}(M^F,M^F)\cong M_s(D^*), \tag{9}$$

其中 $s=\dim_{D^*}(M^F)$. 类似于上面讲过的理由,有

$$\mathrm{Hom}_{A^F}(M^F,M^F)=\mathrm{Hom}_{B^F}(M^F,M^F). \tag{10}$$

由于 F 是代数封闭域,并且 M^F 是不可约左 A^F-模,且 $\dim_F(M^F)=\dim_K M<\infty$,因此据 Schur 引理得

$$\mathrm{Hom}_{A^F}(M^F,M^F)\cong F. \tag{11}$$

由此得出: $D^*=\mathrm{Hom}_{B^F}(M^F,M^F)=\mathrm{Hom}_{A^F}(M^F,M^F)\cong F$,从而有

$$\dim_K M=\dim_F(M^F)=\dim_{D^*}(M^F)=s; \tag{12}$$

$$\dim_K B=\dim_F(B^F)=s^2, \tag{13}$$

其中 $\dim_F(B^F)=s^2$是因为 $B^F\cong M_s(D^*)\cong M_s(F)$. 从(7)式得:

$$\begin{aligned}\dim_K B&=\dim_K(M_n(D))=(\dim_K D)(\dim_D M_n(D))\\&=(\dim_K D)\cdot n^2.\end{aligned} \tag{14}$$

从(6)、(12)、(13)和(14)式得

$$\begin{aligned}s^2&=(\dim_K M)^2=(\dim_K D)^2(\dim_D M)^2=(\dim_K D)^2\cdot n^2\\&=(\dim_K D)^2\cdot\frac{\dim_K B}{\dim_K D}=(\dim_K D)\cdot s^2,\end{aligned}$$

由此得到: $\dim_K D=1$,所以 $D\cong K$.

充分性 设 $\mathrm{Hom}_A(M,M)\cong K$. 任取 K 的一个扩域 F,则 M^F 是左 A^F-模. 根据(7)式,$B=A_L\cong M_n(D)$. 现在 $D\cong K$,因此 $B\cong M_n(K)$. 于是 M 是不可约左 $M_n(K)$-模,从而 M^F 是左 $M_n(K)^F$-模. 由于 $M_n(K)^F$ 的元素形如 $\sum l_{ij}e_{ij}$,其中 e_{ij} 是(i,j) 元为1,其余元全为0的矩阵,$l_{ij}\in F$,因此,$M_n(K)^F=M_n(F)$. 于是 M^F 是左 $M_n(F)$-模. 因为

$$\dim_F(M^F)=\dim_K M=\dim_D M=n,$$

所以有 F 上向量空间的同构: $M^F\cong M_n(F)e_{ii}$. 易验证这也是 $M_n(F)$-同构. 由于 $M_n(F)e_{ii}$是 $M_n(F)$的极小左理想,所以 M^F 是不可约左 $M_n(F)$-模. 由于 $M_n(F)=M_n(K)^F\cong B^F$,因此 M^F 是不可约左 B^F-模. 从而 M^F 是不可约左 A^F-模. 这就证明了 M 是绝对不可约的. ▎

推论4.3.3 设 A 是代数闭域 F 上的有限维代数，M 是不可约左 A-模并且 $\dim_F M<\infty$，则 M 是绝对不可约的.

证明 据 Schur 引理得：$\mathrm{Hom}_A(M,M)\cong F$. 从而据定理4.3.1得：$M$ 是绝对不可约的. ▌

推论4.3.4 设 G 是有限群，则任一代数封闭域都是 G 的分裂域.

证明 设 F 是代数闭域. 设 (φ,V) 是 G 的任一不可约 F-表示. 据推论4.3.3得：左 $F[G]$-模 V 是绝对不可约的. 从而对于 F 的每一个扩域 E，都有 V^E 是不可约左 $F[G]^E$-模，从 $F[G]^E$ 的元素可看出 $F[G]^E=E[G]$. 于是 V^E 是不可约左 $E[G]$-模，从而 φ^E 是 G 的不可约 E-表示. 因此 φ 是绝对不可约的，从而 F 是 G 的分裂域. ▌

推论4.3.4说明有限群 G 的分裂域一定存在，例如复数域就是 G 的分裂域. 下面我们进一步讨论域 K 是有限群 G 的分裂域的充分必要条件.

设 (φ,V) 是有限群 G 的不可约 K-表示. 从推论4.3.4的证明过程看到：若左 $K[G]$-模 V 是绝对不可约的，则 K-表示 φ 是绝对不可约的. 反之亦然.

定理4.3.2 设 G 是有限群，域 K 的特征不能整除 $|G|$. 设 $K[G]=A_1\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_s$，其中 $A_i(i=1,2,\cdots,s)$ 是单环. 设 L_{i1} 是 $K[G]$ 的极小左理想并且 $L_{i1}\subset A_i$，令 $D_i=\mathrm{Hom}_{A_i}(L_{i1},L_{i1})$，$i=1,2,\cdots,s$. 则 K 是 G 的分裂域当且仅当 $D_i\cong K$，$i=1,2,\cdots,s$.

证明 若 $\sigma\in\mathrm{Hom}_{K[G]}(L_{i1},L_{i1})$，则显然有 $\sigma\in\mathrm{Hom}_{A_i}(L_{i1},L_{i1})$. 反之，若 $\sigma\in\mathrm{Hom}_{A_i}(L_{i1},L_{i1})$，任取 $a\in K[G]$，$x_i\in L_{i1}$，设 $a=a_1+a_2+\cdots+a_s$，其中 $a_j\in A_j(1\leqslant j\leqslant s)$. 从定理2.2.3的证明过程知道：$A_iA_j=(0)$ 当 $j\neq i$. 因此 $ax_i=a_ix_i$，$a\sigma(x_i)=a_i\sigma(x_i)$. 从而得到：$\sigma(ax_i)=\sigma(a_ix_i)=a_i\sigma(x_i)=a\sigma(x_i)$，这说明 $\sigma\in\mathrm{Hom}_{K[G]}(L_{i1},L_{i1})$. 因此 $\mathrm{Hom}_{K[G]}(L_{i1},L_{i1})=\mathrm{Hom}_{A_i}(L_{i1},L_{i1})$.

任取 G 的一个不可约 K-表示 (φ,V)，则 V 必然同构于某个 L_{i1}.

因此，K 是 G 的分裂域 $\Longleftrightarrow L_{i1}$ 绝对不可约 $(i=1,2,\cdots,s)\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Hom}_{K[G]}(L_{i1},L_{i1})\cong K(i=1,2,\cdots,s)\Longleftrightarrow D_i\cong K(i=1,2,\cdots,s)$. ▌

从定理4.3.2知道，在第二章§3和第三章中的一些定理或命题或推论，如果其条件包含"K 是特征不能整除$|G|$的域并且使得 $D_i\cong K$ $(i=1,2,\cdots,s)$"，那么这句话等价于"域 K 的特征不能整除$|G|$并且 K 是 G 的分裂域".

从定理4.3.2和定理2.3.6还可得到：

推论4.3.5 设 G 是有限群，域 K 的特征不能整除$|G|$. 则 K 是 G 的分裂域当且仅当 G 的所有不等价的不可约 K-表示的次数的平方和等于$|G|$.

根据推论4.3.5，从例2.3.1知道：若 $\mathrm{char}K\nmid 6$，则 K 是 S_3的分裂域；从例2.3.2知道：实数域是 D_5的分裂域；从例2.3.3知道：实数域是 S_4的分裂域；从例2.3.4知道：实数域不是3阶循环群的分裂域；从习题2.3的第5题知道：实数域不是四元数群的分裂域；从例3.3.1知道：实数域是二面体群 D_6的分裂域；，从例3.3.3知道：实数域不是 A_4的分裂域.

从定理4.3.1还可得到：

推论4.3.6 设 A 是域 K 上的有限维代数，并且 K 是 A 的分裂域. 设 V 是不可约左 A-模并且 $\dim_K V<\infty$，则

$$\mathrm{Hom}_A(V,V)\cong K.$$

把推论4.3.6与 Schur 引理比较可看出：Schur 引理中的条件"K 是代数封闭域"可以减弱成"K 是 A 的分裂域并且 A 是有限维的"，结论仍然成立.

习 题 4.3

1. 设 R 是有单位元的环，R 的所有极大左理想的交称为 R 的 Jacobson 根，记作 $J(R)$.

设 R 是具有极小条件的环，证明：

$$J(R)=\mathrm{rad}R.$$

(**提示**：先证 $J(R)\subset \mathrm{rad}R$. 任取 $a\in J(R)$，只要证 a 属于任一不可约左 R-模 M 的零化子. 任取 $x\in M$ 且 $x\neq 0$，去证 $M=Rx$. 令 $f: r\mapsto rx, \forall\, r\in R$. 验证 f 是左正则 R-模 R 到 M 的满的模同态，从而 $R/\mathrm{Ker}f\cong M$. 去证 $\mathrm{Ker}f$ 是 R 的极大左理想，从而 $a\in\mathrm{Ker}f$，于是 $ax=0$，说明 $a\in\mathrm{ann}(M)$. 再证 $\mathrm{rad}R\subset J(R)$. 只要证 R 的任一极大左理想 $I\supset\mathrm{rad}R$. 假如不然，则 $I+\mathrm{rad}R=R$，从而 $1=a+c$，其中 $a\in I, c\in\mathrm{rad}R$. 于是 c 是幂零元，由此推出 $1-c$ 可逆，即 a 可逆. 从而 $I=R$.)

2. 设 G 是有限群，域 K 的特征为0. 设 φ 是 G 的 K-表示，χ 是 φ 提供的特征标. 证明：φ 绝对不可约当且仅当 $\langle\chi,\chi\rangle=1$.

3. 设 G 是有限群，域 K 的特征为0. 设 G 传递地作用在 n 元集合 Ω 上，由此引起的 n 次置换表示 $\varphi\approx\varphi_1\oplus\psi$，其中 φ_1 是 G 的主表示. 证明：G 在 Ω 上的作用是双传递的当且仅当 ψ 是绝对不可约的.

4. 求二面体群 $D_{2m}=\langle a,b\,|\,a^{2m}=1, b^2=1, bab^{-1}=a^{-1}\rangle$ 的所有不等价的不可约实表示和复表示，并且写出其特征标表. 实数域是 D_{2m} 的分裂域吗？

(**提示**：求出 D_{2m} 的中心为 $Z(D_{2m})=\{1,a^m\}$. 然后求出 D_{2m} 有 $m+3$ 个共轭类，其代表元为：$1,a,a^2,\cdots,a^{m-1},a^m,b,ab$. 求出 $D'_{2m}=\langle a^2\rangle$，商群 D_{2m}/D'_{2m} 是 Klein 四元群. 于是 D_{2m} 有4个1次实表示. 考虑正 $2m$ 边形的对称群 G，绕中心 O 转角为 $\frac{2\pi}{2m}$ 的旋转 $\alpha\in G$，关于直线 OA 的反射 $\beta\in G$，其中 A 是正 $2m$ 边形的一个顶点. 对于 $1\leqslant i\leqslant 2m-1$，映射 $\psi_i: a\mapsto\alpha^i, b\mapsto\beta$ 是 D_{2m} 到 $\mathrm{GL}(V)$ 的同态，其中 V 是平面上以 O 为起点的所有向量组成的实向量空间. 于是 ψ_i 是 D_{2m} 的2次实表示，写出它的矩阵表示. 证明：$\psi_i\approx\psi_{2m-i}$. 当 $1\leqslant i\leqslant m-1$ 时，证明 ψ_i 不可约. 当 $1\leqslant i,j\leqslant m-1$ 时，$\psi_i\not\approx\psi_j$. 于是不等价的不可约2次实表示已求出 $m-1$ 个. 不等价的不可约实表示已求出 $4+(m-1)=m+3$ 个. 并且 $4\cdot 1^2+(m-1)\cdot 2^2=4m=|D_{2m}|$，所以这些是 D_{2m}

的全部不等价的不可约实表示，并且实数域是 D_{2m} 的分裂域.）

5. 求二面体群 D_{2m+1} 的所有不等价的不可约实表示和复表示，写出特征标表. 实数域是 D_{2m+1} 的分裂域吗？

§4 群的直积的表示

设 G 是群 G_1 和 G_2 的外直积，(φ,V)，(ψ,W) 分别是 G_1 和 G_2 的 K-表示. 我们将利用张量积得到 G 的一个 K-表示. 方法如下：

首先作向量空间 V 和 W 的张量积：$V\otimes_K W$. 其次规定群代数 $K[G]$ 在 $V\otimes_K W$ 上的作用由下式给出：

$$(g_1,g_2)(v\otimes w) := g_1v\otimes g_2w,\quad g_i\in G_i, v\in V, w\in W, \tag{1}$$

并且线性地扩充到 $K[G]$ 和 $V\otimes_K W$ 上. 这样 $V\otimes_K W$ 成为左 $K[G]$-模，称它是左 $K[G_1]$-模 V 和左 $K[G_2]$-模 W 的**外张量积**，把它记作 $V\#W$. 由左 $K[G]$-模 $V\#W$ 提供的 G 的表示称为 G_1 的表示 φ 与 G_2 的表示 ψ 的**外张量积**，记作 $\varphi\#\psi$. 于是有

$$\begin{aligned}[(\varphi\#\psi)(g_1,g_2)](v\otimes w) &= (g_1,g_2)(v\otimes w) = g_1v\otimes g_2w\\ &= \varphi(g_1)v\otimes\psi(g_2)w;\end{aligned}$$

$$[\varphi(g_1)\otimes\psi(g_2)](v\otimes w) = \varphi(g_1)v\otimes\psi(g_2)w,$$

因此

$$(\varphi\#\psi)(g_1,g_2) = \varphi(g_1)\otimes\psi(g_2). \tag{2}$$

从而相应的矩阵表示满足下述关系式：

$$(\Phi\#\Psi)(g_1,g_2) = \Phi(g_1)\otimes\Psi(g_2). \tag{3}$$

于是相应的特征标满足：

$$\chi_{\varphi\#\psi}(g_1,g_2) = \chi_\varphi(g_1)\cdot\chi_\psi(g_2). \tag{4}$$

现在讨论外张量积表示的等价问题.

命题4.4.1 设 G 是群 G_1 和 G_2 的外直积，K 是任一域. 设 (φ,V) 和 (φ',V') 是 G_1 的两个不可约 K-表示；(ψ,W) 和 (ψ',W') 是 G_2 的两个不可约 K-表示. 则 $\varphi\#\psi\approx\varphi'\#\psi'$ 的充分必要条件是 $\varphi\approx\varphi'$

并且 $\psi \approx \psi'$.

证明 充分性 若 $\varphi \approx \varphi'$，$\psi \approx \psi'$，则存在向量空间的同构 σ: $V \to V'$；τ: $W \to W'$ 使得

$$\varphi'(g_1)\sigma = \sigma\varphi(g_1), \qquad \forall\, g_1 \in G_1;$$
$$\psi'(g_2)\tau = \tau\psi(g_2), \qquad \forall\, g_2 \in G_2.$$

显然 $\sigma \otimes \tau$ 是向量空间 $V \otimes_K W$ 到 $V' \otimes_K W'$ 的同构，并且有

$$\begin{aligned}
&[(\varphi' \# \psi')(g_1, g_2)](\sigma \otimes \tau)(v \otimes w) \\
&\qquad = \varphi'(g_1)\sigma v \otimes \psi'(g_2)\tau w \\
&\qquad = \sigma\varphi(g_1)v \otimes \tau\psi(g_2)w \\
&\qquad = (\sigma \otimes \tau)[(\varphi \# \psi)(g_1, g_2)](v \otimes w),
\end{aligned}$$

所以

$$[(\varphi' \# \psi')(g_1, g_2)](\sigma \otimes \tau) = (\sigma \otimes \tau)[(\varphi \# \psi)(g_1, g_2)],$$
$$\forall\, g_i \in G_i.$$

从而得到 $\varphi' \# \psi' \approx \varphi \# \psi$.（注：在证明充分性时，不需要不可约的条件.）

必要性 若 $\varphi \# \psi \approx \varphi' \# \psi'$，则有左 $K[G]$-模同构：

$$V \# W \cong V' \# W'.$$

令 $G_1^* = \{(g_1, 1) \mid g_1 \in G_1\}$，显然 $G_1^* \cong G_1$，把 G_1^* 与 G_1 等同，于是把 G_1 看成 $G_1 \times G_2$ 的子群，从而可把 $V \# W$ 看成左 $K[G_1]$-模. 在 W，W' 上分别取一个基：$w_1, \cdots, w_m$；$w'_1, \cdots, w'_n$. 从而有

$$V \otimes_K W \cong V \otimes_K \langle w_1 \rangle \dotplus \cdots \dotplus V \otimes_K \langle w_m \rangle.$$

由于 $(g_1, 1)(v \otimes w_i) = g_1 v \otimes w_i \in V \otimes_K \langle w_i \rangle$，$\forall\, g_1 \in G_1$，因此 $V \otimes_K \langle w_i \rangle$ 是左 $K[G_1]$-模，从而得到左 $K[G_1]$-模 $V \# W$ 的直和分解式：

$$V \# W \cong V \otimes_K \langle w_1 \rangle \dotplus \cdots \dotplus V \otimes_K \langle w_m \rangle.$$

易验证左 $K[G_1]$-模 V 与 $V \otimes_K \langle w_i \rangle$ 同构，$i = 1, 2, \cdots, m$. 于是得

$$V \# W \cong V \dotplus \cdots \dotplus V = mV.$$

类似地把 $V' \# W'$ 看成左 $K[G_1]$-模，可得左 $K[G_1]$-模同构：

$$V' \# W' \cong nV'.$$

已知有左 $K[G]$-模同构：$V\#W\approx V'\#W'$，把两边看成左 $K[G_1]$-模，便得左 $K[G_1]$-模同构：$mV\cong nV'$. 由于 V 和 V' 都是不可约左 $K[G_1]$-模，于是据 Jordan-Hölder 定理，得到：$V\cong V'$. 从而 $\varphi\approx\varphi'$. 同理可证 $W\cong W'$，从而 $\psi\approx\psi'$. ▌

我们要讨论的另一个问题是：若 φ,ψ 分别是 G_1和 G_2的不可约表示，那么 $\varphi\#\psi$ 是否为 $G_1\times G_2$的不可约表示?反之，若 $\varphi\#\psi$ 不可约，那么 φ和 ψ 是否都不可约?

命题4.4.2 设 K 是任一域，(φ,V)是群 G_1的 K-表示，(ψ,W)是 G_2的 K-表示，若$(\varphi\#\psi,V\#W)$是 $G=G_1\times G_2$的不可约 K-表示，则 φ和 ψ 均不可约.

证明 假如 φ 可约，设 V_1是 V 的非平凡 G_1不变子空间，则 $\dim_K V_1<\dim_K V$. 从而有

$$\begin{aligned}\dim_K(V_1\otimes_K W)&=(\dim_K V_1)(\dim_K W)\\&<(\dim_K V)(\dim_K W)=\dim_K(V\otimes_K W),\end{aligned}$$

因此 $V_1\otimes_K W$ 是 $V\otimes_K W$ 的真子空间，显然不是零子空间. 又由于

$$[(\varphi\#\psi)(g_1,g_2)](v_1\otimes w)=\varphi(g_1)v_1\otimes\psi(g_2)w\in V_1\otimes_K W,$$

因此 $V_1\otimes_K W$ 是 G 不变子空间且非平凡，这与 $\varphi\#\psi$ 不可约矛盾. 同理可证 ψ 不可约. ▌

命题4.4.3 设 K 是有限群 G_1和 G_2的分裂域，并且 $\mathrm{char}K=0$. 若 φ,ψ 分别是 G_1,G_2的不可约 K-表示，则 $\varphi\#\psi$ 是 $G=G_1\times G_2$的不可约 K-表示，而且是绝对不可约的.

证明 由于 $\mathrm{char}K=0$并且 K 是 G_1和 G_2的分裂域，于是从 φ，ψ 不可约得出$(\chi_\varphi,\chi_\varphi)_{G_1}=1$，$(\chi_\psi,\chi_\psi)_{G_2}=1$. 从而得出

$$\begin{aligned}(\chi_{\varphi\#\psi},\chi_{\varphi\#\psi})_G&=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\varphi\#\psi}(g)\chi_{\varphi\#\psi}(g^{-1})\\&=\frac{1}{|G_1||G_2|}\sum_{g_1\in G_1}\sum_{g_2\in G_2}\chi_\varphi(g_1)\chi_\psi(g_2)\chi_\varphi(g_1^{-1})\chi_\psi(g_2^{-1})=1.\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{char}K=0$，所以 $\varphi\#\psi$ 不可约. 并且据习题4.3第2题知 $\varphi\#\psi$ 绝对不可约. ▌

定理4.4.1 设 K 是有限群 G_1和 G_2的分裂域，且 $\mathrm{char}K=0$. 设 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_s$ 是 G_1的所有不等价的不可约 K-表示；设 $\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_t$ 是 G_2的所有不等价的不可约 K-表示. 则

$$\{\varphi_i \# \psi_j \mid i=1,2,\cdots,s; j=1,2,\cdots,t\}$$

是 $G=G_1\times G_2$的所有不等价的不可约 K-表示，并且 K 也是 G 的分裂域.

证明 由命题4.4.3知，每个 $\varphi_i\#\psi_j$ 是 G 的不可约 K-表示并且绝对不可约. 由命题4.4.1知：$\varphi_i\#\psi_j\approx\varphi_{i'}\#\psi_{j'}$ 当且仅当 $i=i'$ 并且 $j=j'$. 因此$\{\varphi_i\#\psi_j \mid 1\leqslant i\leqslant s, 1\leqslant j\leqslant t\}$给出了 G 的 st 个不等价的不可约 K-表示.

因为 K 是 G_1和 G_2的分裂域且 $\mathrm{char}\,K=0$，所以 G_1,G_2分别有 s,t 个共轭类. 其代表元假设分别为$\{a_1,a_2,\cdots,a_s\}$和$\{b_1,b_2,\cdots,b_t\}$. 易看出$\{(a_i,b_j)\mid i=1,2,\cdots,s; j=1,2,\cdots,t\}$正好是 G 的全部共轭类的代表元，因此 G 有 st 个共轭类. 从而$\{\varphi_i\#\psi_j\mid i=1,2,\cdots,s; j=1,2,\cdots,t\}$是 G 的全部不等价的不可约 K-表示. 由于它们都是绝对不可约的，所以 K 是 G 的分裂域. ▌

推论4.4.1 条件同定理4.4.1. 若 G_1,G_2的特征标表分别为 T_1和 T_2，则 $G=G_1\times G_2$的特征标表 $T=T_1\otimes T_2$.

证明 由定理4.4.1和(4)式即可得到结论. ▌

习 题 4.4

1. 求群 $G=\mathbf{Z}_2\times\mathbf{Z}_2\times\mathbf{Z}_7$的复特征标表.
2. 求15阶群 G 的复特征标表.

§5 不可约复表示的次数的又一性质

本节将利用外张量积证明有限群的不可约复表示的次数的又一性质：

定理4.5.1(Schur) 有限群 G 的任一不可约复表示的次数

能整除$[G:Z(G)]$，其中$Z(G)$是G的中心.

证明 任取G的一个不可约复表示(φ,V)，φ提供的特征标记作χ. 任取$a\in Z(G)$，显然$\varphi(a)$与一切$\varphi(g)$可交换. 又由于φ不可约，据习题2.2的第7题得到：

$$\varphi(a)=\lambda(a)1_V,$$

其中$\lambda(a)\in C$. 映射$a\mapsto\lambda(a)$显然是$Z(G)$到C^*的群同态. 任取一个正整数m，考虑左CG-模V的m重外张量积：$V\#V\#\cdots\#V$，记作$V^{(m)}$. 由于V不可约，据命题4.4.3得：$V^{(m)}$提供的$G\times G\times\cdots\times G$的表示$\varphi\#\varphi\#\cdots\#\varphi$是不可约的. 令

$$H_m=\{(a_1,a_2,\cdots,a_m)\mid a_1a_2\cdots a_m=1,\ a_i\in Z(G),1\leqslant i\leqslant m\},$$

显然H_m是$Z(G)\times\cdots\times Z(G)$的子群，并且$|H_m|=|Z(G)|^{m-1}$. 任取$(a_1,a_2,\cdots,a_m)\in H_m$，任取$v_1\otimes\cdots\otimes v_m\in V^{(m)}$，有

$$\begin{aligned}(a_1,a_2,\cdots,a_m)(v_1\otimes\cdots\otimes v_m)&=a_1v_1\otimes\cdots\otimes a_mv_m\\&=\lambda(a_1)v_1\otimes\cdots\otimes\lambda(a_m)v_m\\&=\lambda(a_1)\cdots\lambda(a_m)[v_1\otimes\cdots\otimes v_m]\\&=\lambda(a_1\cdots a_m)[v_1\otimes\cdots\otimes v_m]\\&=\lambda(1)[v_1\otimes\cdots\otimes v_m]=v_1\otimes\cdots\otimes v_m,\end{aligned}$$

因此$(a_1,a_2,\cdots,a_m)\in\mathrm{Ker}(\varphi\#\varphi\#\cdots\#\varphi)$. 从而$H_m\subset\mathrm{Ker}(\varphi\#\varphi\#\cdots\#\varphi)$. 于是可得商群$G\times\cdots\times G/H_m$的不可约表示$\psi$使得$\psi$的提升等于$\varphi\#\varphi\#\cdots\#\varphi$. ψ与$\varphi\#\varphi\#\cdots\#\varphi$有相同的表示空间，其维数为$\chi(1)^m$. 据第三章§5的定理3.5.1得：$\chi(1)^m$整除$\frac{|G|^m}{|H_m|}=[G:Z(G)]^m\cdot|Z(G)|$. 因此得到

$$\left(\frac{[G:Z(G)]}{\chi(1)}\right)^m=\frac{k_m}{|Z(G)|},\quad k_m\text{ 是整数}.$$

记

$$\alpha=\frac{[G:Z(G)]}{\chi(1)},$$

则由上述，得：对一切正整数m有$\alpha^m\in\frac{1}{|Z(G)|}\mathbf{Z}$. 从而得：

$$\mathbf{Z}[\alpha] \subset \frac{1}{|Z(G)|}\mathbf{Z}.$$

显然$\frac{1}{|Z(G)|}\mathbf{Z}$是$\mathbf{Z}$-模，并且$\frac{1}{|Z(G)|}$是它的生成元. 由于主理想整环上有限生成模的子模仍是有限生成的，所以$\mathbf{Z}[\alpha]$是有限生成的. 据第三章命题3.5.1得α是代数整数. 又由于α是有理数，因此α是有理整数. 从而$\chi(1) \mid [G:Z(G)]$. (这个证明是由 J. Tate 给出的.) ▌

习 题 4.5

1. 设(φ, V)是有限群G的任一不可约复表示，φ提供的特征标记作χ. 证明：

(i) $\chi(1) \mid [G:Z(\chi)]$;

(ii) $\chi(1)^2 \leqslant [G:Z(\chi)]$，等号成立当且仅当对一切$y \in G \setminus Z(\chi)$有$\chi(y)=0$;

(iii) 若$G' \subset Z(\chi)$，则$\chi(1)^2=[G:Z(\chi)]$.

(**提示**：(i) 据习题3.1的第4题和第5题知：$Z(\chi) \lhd G$，并且$\mathrm{Ker}\varphi \subset Z(\chi)$，并且$Z(\chi)/\mathrm{Ker}\varphi = Z(G/\mathrm{Ker}\varphi)$. 然后根据本节定理4.5.1知，$G/\mathrm{Ker}\varphi$的任一不可约复表示的次数能整除$[G/\mathrm{Ker}\varphi: Z(G/\mathrm{Ker}\varphi)] = [G/\mathrm{Ker}\varphi: Z(\chi)/\mathrm{Ker}\varphi] = [G:Z(\chi)]$. 注意由$G$的表示$\varphi$可得到$G/\mathrm{Ker}\varphi$的表示$\tilde{\varphi}$使得$\varphi$是$\tilde{\varphi}$的提升，从而它们有相同的次数.

(ii) 据第一正交关系有$\langle \chi, \chi \rangle = 1$，由此出发可证出结论.

(iii) 只要证对一切$y \overline{\in} Z(\chi)$有$\chi(y)=0$. 利用习题3.1的第5题的结果：$g \in Z(\chi)$当且仅当$g\mathrm{Ker}\varphi \in Z(G/\mathrm{Ker}\varphi)$. 于是从$g \overline{\in} Z(\chi)$推出：存在$h \in G$使得$(g\mathrm{Ker}\varphi)(h\mathrm{Ker}\varphi) \neq (h\mathrm{Ker}\varphi)(g\mathrm{Ker}\varphi)$，即$g^{-1}h^{-1}gh \overline{\in} \mathrm{Ker}\varphi$. 记$a = g^{-1}h^{-1}gh$，则$a \in G' \subset Z(\chi)$. 从而$|\chi(a)| = \chi(1)$. 所以$\varphi(a) = \lambda \cdot 1_V$，其中$\lambda$是单位根. 因为$a \notin \mathrm{Ker}\varphi$，所以$\lambda \neq 1$. 由此算出$\chi(g)=0$.)

第五章　诱导表示和诱导特征标

本章研究群 G 的表示与它的子群的表示之间的关系，其主要目的是利用 G 的子群已知的不可约表示来获得 G 的一些不可约表示，从而了解 G 的结构. 本章讨论的表示都是有限维表示.

§1　诱导表示

如果知道群 G 的子群 H 的一个 K-表示(ψ,W)，如何从它构造 G 的一个 K-表示？用模的语言来说，就是从已知的左 $K[H]$-模 W 出发，如何构造一个左 $K[G]$-模？这需要利用模的张量积.

定义 1　设 K 是任一域，H 是群 G 的子群，设 W 是左 $K[H]$-模，则$(K[G],K[H])$-双模 $K[G]$与左 $K[H]$-模 W 的张量积

$$K[G]\otimes_{K[H]}W$$

是左 $K[G]$-模，称它是 W 的**诱导模**，记作 W^G. 由 W^G 提供的 G 的表示称为**诱导表示**.

命题 5.1.1　设群 G 关于子群 H 的左陪集分解式为：

$$G = g_1H\cup g_2H\cup\cdots\cup g_tH, \tag{1}$$

其中 $g_1=1$. 设左 $K[H]$-模 W 的一个 K-基为 $w_1,w_2,\cdots,w_r$，则 W^G 的一个 K-基为：

$$\{g_i\otimes w_j\mid 1\leqslant i\leqslant t,\ 1\leqslant j\leqslant r\}, \tag{2}$$

并且

$$\dim_K(W^G) = (\dim_K W)\cdot[G:H], \tag{3}$$

其中$[G:H]$表示子群 H 在群 G 中的指数.

证明　为了知道 W^G 中每个元素可由哪些元素线性表出，先看 G 中每个元素 g. 显然 g 可唯一表成 g_ih，对某个 i 和某个 $h\in H$. 于是 $K[G]$的每个元素可唯一表成

$$\sum_{g\in G}k_g g=\sum_{i=1}^{t}\sum_{h\in H}k_{g_ih}g_ih=\sum_{i=1}^{t}g_i\sum_{h\in H}k_{g_ih}h=\sum_{i=1}^{t}g_ib_i,$$

其中

$$b_i=\sum_{h\in H}k_{g_ih}h\in K[H].$$

所以

$$K[G]=g_1K[H]\oplus g_2K[H]\oplus\cdots\oplus g_tK[H].\tag{4}$$

这表明 $K[G]$ 是自由右 $K[H]$-模，具有一个 $K[H]$-基 $\{g_1,g_2,\cdots,g_t\}$. 由于 $g_iK[H]$ 是代数 $K[H]$ 上的右模，因此 $g_iK[H]$ 是域 K 上的向量空间，从而它可看成 $(K,K[H])$-双模. 于是有下述左 K-模同构：

$$\begin{aligned}W^G&=K[G]\otimes_{K[H]}W\\&\cong(g_1K[H]\otimes_{K[H]}W)\dotplus\cdots\dotplus(g_tK[H]\otimes_{K[H]}W).\end{aligned}\tag{5}$$

考虑 $g_iK[H]$ 到 $K[H]$ 的映射：$g_ia\mapsto a,\forall\ a\in K[H]$. 易验证此映射是右 $K[H]$-模同构，并且是左 K-模同构，所以有 $(K,K[H])$-双模同构：$g_iK[H]\cong K[H]$. 从而得到左 K-模同构：$g_iK[H]\otimes_{K[H]}W\cong K[H]\otimes_{K[H]}W$. 据定理 4.1.4 知，有左 $K[H]$-模同构：$K[H]\otimes_{K[H]}W\cong W$，其同构映射为：$a\otimes w\mapsto aw$. 容易看出此映射也是左 K-模同构. 于是得到左 K-模同构：

$$g_iK[H]\otimes_{K[H]}W\cong W.\tag{6}$$

从(5)和(6)式便得到下述左 K-模同构：

$$W^G\cong W\dotplus\cdots\dotplus W,\tag{7}$$

所以 $\dim_K(W^G)=t\cdot\dim_K W=[G:H]\dim_K W$.

因为 W 的一个 K-基是 $w_1,w_2,\cdots,w_r$，所以

$$\begin{aligned}g_ib\otimes w&=g_i\otimes bw=g_i\otimes\Big(\sum_{j=1}^{r}k_jw_j\Big)\\&=\sum_{j=1}^{r}g_i\otimes k_jw_j=\sum_{j=1}^{r}g_ik_j\otimes w_j\\&=\sum_{j=1}^{r}k_jg_i\otimes w_j=\sum_{j=1}^{r}k_j(g_i\otimes w_j),\end{aligned}\tag{8}$$

其中倒数第二个等号是因为 $K[G]$既是左 $K[G]$-模，又是右 $K[G]$-模，所以 $g_ik_j=g_i(k_j1)=(k_j1)g_i=k_jg_i$；最后一个等号是因为 $K[G]\otimes_{K[H]}W$ 是左 K-模. (8)式说明 $g_iK[H]\otimes_{K[H]}W$ 中每个元素可以表成 $g_i\otimes w_1, g_i\otimes w_2, \cdots, g_i\otimes w_r$ 的 K-线性组合，从而 W^G 中每个元素可表成$\{g_i\otimes w_j \mid 1\leqslant i\leqslant t, 1\leqslant j\leqslant r\}$的 K-线性组合. 又由于$\dim_K(W^G)=rt$，所以$\{g_i\otimes w_j \mid 1\leqslant i\leqslant t, 1\leqslant j\leqslant r\}$是 W^G 的一个 K-基.

命题 5.1.2 记号同命题 5.1.1. 设左 $K[H]$-模 W 提供的 H 的 K-表示 ψ 在 W 的一个基 $w_1, w_2, \cdots, w_r$ 下的矩阵表示为 Ψ，则 W^G 提供的 G 的 K-表示 ψ^G 在 W^G 的相应基

$$\{g_1\otimes w_1, \cdots, g_1\otimes w_r, \cdots, g_t\otimes w_1, \cdots, g_t\otimes w_r\}$$

下的矩阵表示 Ψ^G 为：

$$\Psi^G(g)=\begin{pmatrix} \dot{\Psi}(g_1^{-1}gg_1) & \dot{\Psi}(g_1^{-1}gg_2) & \cdots & \dot{\Psi}(g_1^{-1}gg_t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dot{\Psi}(g_t^{-1}gg_1) & \dot{\Psi}(g_t^{-1}gg_2) & \cdots & \dot{\Psi}(g_t^{-1}gg_t) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

其中

$$\dot{\Psi}(y)=\begin{cases}\Psi(y), & 当\ y\in H, \\ 0, & 当\ y\overline{\in} H.\end{cases}$$

证明 任给 $j(1\leqslant j\leqslant t)$，任给 $g\in G$，有 $gg_j=g_lh$ 对某个 l 和某个 $h\in H$. 设 $\psi(h)=(a_{ij}(h))$，于是有

$$\begin{aligned}\psi^G(g)(g_j\otimes w_i) &= g(g_j\otimes w_i)=gg_j\otimes w_i=g_lh\otimes w_i \\ &= g_l\otimes hw_i=g_l\otimes\psi(h)w_i \\ &= g_l\otimes\sum_{s=1}^{r}a_{si}(h)w_s=\sum_{s=1}^{r}a_{si}(h)(g_l\otimes w_s).\end{aligned}$$

规定

$$\dot{a}_{si}(y)=\begin{cases}a_{si}(y), & 当\ y\in H, \\ 0, & 当\ y\overline{\in} H,\end{cases}$$

则有

$$\psi^G(g)(g_j \otimes w_i) = \sum_{s=1}^{t} \dot{a}_{si}(g_l^{-1}gg_j)(g_l \otimes w_s). \tag{10}$$

由于 $g_l^{-1}gg_j = h \in H$，所以当 $m \neq l$ 时有 $g_m^{-1}gg_j \overline{\in} H$. 从而(10)式可以写成

$$\psi^G(g)(g_j \otimes w_i) = \sum_{s=1}^{r}\sum_{m=1}^{t} \dot{a}_{si}(g_m^{-1}gg_j)(g_m \otimes w_s). \tag{11}$$

从(11)式得出 $\Psi^G(g)$的(k,j)-块矩阵为 $\Psi(g_k^{-1}gg_j)$，由此即得(9)式. ▌

注 由于 $g_k^{-1}gg_1, g_k^{-1}gg_2, \cdots, g_k^{-1}gg_t$ 有且只有一个元素属于 H，所以 $\Psi^G(g)$的分块矩阵(9)的每一行有且只有一个子矩阵不为零矩阵. 同理，(9)的每一列有且只有一个子矩阵不为零矩阵.

命题 5.1.3 设 K 是任一域，G 是有限群，$H<G$. 则 H 的正则表示 ρ_H 的诱导表示$(\rho_H)^G$ 是 G 的正则表示(在等价的意义上).

证明 ρ_H 的表示空间是左正则 $K[H]$-模 $K[H]$，又

$$K[H]^G = K[G] \otimes_{K[H]} K[H] \cong K[G],$$

这是左 $K[G]$-模同构. 所以 $K[H]^G$ 提供的 G 的表示$(\rho_H)^G$ 与 $K[G]$提供的 G 的表示 ρ_G 等价. ▌

命题 5.1.4 设 K 是任一域，H 是群 G 的子群，设(ψ_i, W_i)是 H 的 K-表示，$i=1,2,\cdots,m$. 则

$$(\psi_1 \oplus \cdots \oplus \psi_m)^G \approx \psi_1^G \oplus \cdots \oplus \psi_m^G. \tag{12}$$

证明 记 $W = W_1 \dotplus \cdots \dotplus W_m$，则 W 提供的 H 的表示 ψ 为：$\psi = \psi_1 \oplus \cdots \oplus \psi_m$. 因为有下述左 $K[G]$-模同构：

$$\begin{aligned} W^G &= K[G] \otimes_{K[H]} W \\ &\cong K[G] \otimes_{K[H]} W_1 \dotplus \cdots \dotplus K[G] \otimes_{K[H]} W_m \\ &= W_1^G \dotplus \cdots \dotplus W_m^G, \end{aligned}$$

所以 $\psi^G \approx \psi_1^G \oplus \psi_2^G \oplus \cdots \oplus \psi_m^G$. ▌

命题 5.1.5(诱导表示的传递性) 设 K 是任一域，设 H, L 都是群 G 的子群，并且 $H<L$；设(ψ, W)是 H 的表示，则

$$(\psi^L)^G \approx \psi^G. \tag{13}$$

证明 因为有下述左 $K[G]$-模同构：

$$\begin{aligned}(W^L)^G &= K[G]\otimes_{K[L]}W^L = K[G]\otimes_{K[L]}(K[L]\otimes_{K[H]}W)\\ &\cong (K[G]\otimes_{K[L]}K[L])\otimes_{K[H]}W\\ &\cong K[G]\otimes_{K[H]}W = W^G,\end{aligned}$$

所以 $(\psi^L)^G\approx\psi^G$. ▌

下面讨论诱导表示的一个特殊情况. 设 K 是任一域，H 是群 G 的子群，设 (ψ,W) 是 H 的 1 次 K-表示，设 $g_1,\cdots,g_t$ 是 H 在 G 中的左陪集代表系. 从命题 5.1.2 及其后面的注知道：对于 $g\in G$，$\Psi^G(g)$ 的每一行(列)有且只有一个元素不为 0. 这种类型的矩阵称为**单项矩阵**. 因此，H 的 1 次表示 ψ 的诱导表示 ψ^G 的矩阵表示 Ψ^G 具有这样的性质：对于每个 $g\in G$，$\Psi^G(g)$ 是单项矩阵.

定义 2 设 K 是任一域，群 G 的一个 K-表示 φ 称为**单项表示**，如果它是 G 的某个子群的 1 次 K-表示的诱导表示.

从诱导表示的传递性立即得到：设 H 是群 G 的子群，则 H 的单项表示的诱导表示是 G 的单项表示.

习 题 5.1

1. 设 K 是任一域，H 是群 G 的正规子群，设 H 在 G 中的陪集代表系是 $\{g_1=1,g_2,\cdots,g_t\}$，设 (ψ,W) 是 H 的一个 K-表示. 证明：对于 $1\leqslant i\leqslant t$，有

(i) $g_iK[H]\otimes_{K[H]}W$ 是左 $K[H]$-模；

(ii) $g_iK[H]\otimes_{K[H]}W$ 提供的 H 的表示 ψ_i 的次数与 ψ 的次数相同.

2. 设 K 是任一域，H 是群 G 的子群，并且 H 在 G 中的左陪集代表系是 $\{g_1=1,g_2,\cdots,g_t\}$，设 W 是左 $K[H]$-模，令

$$W_i = g_iK[H]\otimes_{K[H]}W,$$

从命题 5.1.1 的证明过程知道：W_i 是左 K-模，即域 K 上的向量空间，易看出 W_i 是 W^G 的子空间，$1\leqslant i\leqslant t$. 令 $\Omega=\{W_1,W_2,\cdots,W_t\}$，证明：左 $K[G]$-模 W^G 诱导了 G 在 Ω 上的一个作用，由此得

到的 G 的置换表示等价于 H 的主表示的诱导表示.

3. 设 K 是任一域,H 是群 G 的子群,并且$[G:H]=t$. 把 H 在 G 中的所有左陪集组成的集合记作 G/H. 对于 $g\in G, aH\in G/H$,规定 $g(aH)=(ga)H$,显然这给出了 G 在集合 G/H 上的一个作用. 证明:从这个作用得到的 G 的置换表示等价于 H 的主表示的诱导表示.

§2 诱导特征标

设 K 是任一域,H 是群 G 的子群,设$\{g_1=1,g_2,\cdots,g_t\}$是 H 在 G 中的左陪集代表系,设(ψ,W)是 H 的一个 K-表示,ψ 提供的特征标记作 μ. 我们把诱导表示 ψ^G 提供的 G 的特征标称为**诱导特征标**,记作 μ^G. 从命题 5.1.2 得到

$$\mu^G(g)=\sum_{i=1}^{t}\dot{\mu}(g_i^{-1}gg_i),\quad \forall\, g\in G, \tag{1}$$

其中

$$\dot{\mu}(y)=\begin{cases}\mu(y), & \text{当 } y\in H,\\ 0, & \text{当 } y\notin H.\end{cases}$$

从公式(1)立即得到:

命题 5.2.1 记号同上述.

(i) 若 $g\notin\bigcup_{a\in G}(aHa^{-1})$,则 $\mu^G(g)=0$;

(ii) 若 $H\triangleleft G$,则对于 $g\notin H$ 有 $\mu^G(g)=0$;

(iii) 若 $H=Z(G)$,则对任意 $g\in G$ 有

$$\mu^G(g)=[G:H]\dot{\mu}(g). \quad ▮ \tag{2}$$

公式(i)依赖于 H 在 G 中的陪集代表 $g_1,g_2,\cdots,g_t$. 现在我们来找 μ^G 的另一个公式. 任意 $h\in H$,若 $g\in H$,则有

$$\dot{\mu}(h^{-1}gh)=\mu(h^{-1}gh)=\mu(g)=\dot{\mu}(g);$$

若 $g\notin H$,则 $h^{-1}gh\notin H$,从而有

$$\dot{\mu}(h^{-1}gh)=0=\dot{\mu}(g).$$

所以对一切 $g\in G$，都有 $\dot{\mu}(h^{-1}gh)=\dot{\mu}(g)$.

命题 5.2.2 记号同上. 当 $\mathrm{char}K\nmid |H|$ 时，我们有

$$\mu^G(g)=\frac{1}{|H|}\sum_{a\in G}\dot{\mu}(a^{-1}ga),\quad \forall\, g\in G. \tag{3}$$

证明 任意 $y\in g_iH$，设 $y=g_ih$ 对于某个 $h\in H$. 我们有

$$\dot{\mu}(y^{-1}gy)=\dot{\mu}(h^{-1}(g_i^{-1}gg_i)h)=\dot{\mu}(g_i^{-1}gg_i),\quad \forall\, g\in G.$$

从而得到

$$\begin{aligned}\sum_{a\in G}\dot{\mu}(a^{-1}ga)&=\sum_{i=1}^{t}\sum_{a\in g_iH}\dot{\mu}(a^{-1}ga)=\sum_{i=1}^{t}\sum_{a\in g_iH}\dot{\mu}(g_i^{-1}gg_i)\\&=\sum_{i=1}^{t}|H|\dot{\mu}(g_i^{-1}gg_i)=|H|\mu^G(g).\end{aligned}$$ ▌

从诱导表示的性质可得到诱导特征标的性质.

推论 5.2.1 设 K 是任一域，G 是有限群，$H<G$. 把 H 的正则表示提供的特征标记作 μ_ρ，把 G 的正则表示提供的特征标记作 χ_ρ，则 $\chi_\rho=(\mu_\rho)^G$. ▌

推论 5.2.2 设 K 是任一域，H 是群 G 的子群，设 μ_i 是 H 的 K-表示 $\psi_i(i=1,2,\cdots,m)$ 提供的特征标. 则

$$(\mu_1+\cdots+\mu_m)^G=\mu_1^G+\cdots+\mu_m^G. \tag{4}$$ ▌

推论 5.2.3(诱导特征标的传递性) 设 K 是任一域，设 H,L 都是群 G 的子群，并且 $H<L$，设 μ 是 H 的 K-表示 ψ 提供的特征标，则

$$(\mu^L)^G=\mu^G. \tag{5}$$ ▌

利用诱导特征标的计算公式(1)，我们可得到诱导特征标的又一条性质：

命题 5.2.3 设 K 是任一域，H 是群 G 的子群，H 在 G 中的左陪集代表系为 $\{g_1=1,g_2,\cdots,g_t\}$，设 μ 是 H 的特征标，χ 是 G 的特征标，则

$$\mu^G\cdot\chi=[\mu\cdot(\chi|H)]^G, \tag{6}$$

其中 $\chi|H$ 表示 χ 在 H 上的限制.

证明 任意 $g\in G$，从公式(1)得到

$$[\mu\cdot(\chi|H)]^G(g)=\sum_{i=1}^{t}[\mu\cdot(\chi|H)]^{\cdot}(g_i^{-1}gg_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{t}\dot{\mu}(g_i^{-1}gg_i)\chi(g_i^{-1}gg_i)=\sum_{i=1}^{t}\dot{\mu}(g_i^{-1}gg_i)\chi(g)$$

$$=\mu^G(g)\chi(g)=(\mu^G\cdot\chi)(g),$$

从而(6)式成立. ▌

利用诱导特征标的这个性质，可得到诱导表示的相应的性质：

推论 5.2.4 设 K 是特征为 0 的域，H 是群 G 的子群，设 (ψ, W) 是 H 的 K-表示，(φ,V) 是 G 的 K-表示，则

$$\psi^G\otimes\varphi\approx[\psi\otimes(\varphi|H)]^G. \quad ▌ \tag{7}$$

注 当 K 是任一域时，推论 5.2.4 仍然成立，这时可用模的语言来证公式(7)，参看[1] p. 268～270.

习 题 5.2

1. 设 G 为四元数群，即，$G=\{\pm1,\pm i,\pm j,\pm k\}$，设 $H=\langle i\rangle$.

(1) 设 ψ_1 是 H 的 1 次复表示，其中 $\psi_1(i)=-1$，证明：ψ_1^G 是 G 的两个 1 次复表示的直和；

(2) 设 ψ_2 是 H 的 1 次复表示，其中 $\psi_2(i)=i$，证明：ψ_2^G 是 G 的 2 次不可约复表示，从而 G 的唯一的一个 2 次不可约复表示是单项表示.

2. 设 G 为四元数群，设 ψ 是 G 的中心 $Z(G)$ 的非平凡的 1 次实表示，证明：ψ^G 是 G 的 4 次不可约实表示，从而 G 的唯一的一个 4 次不可约实表示是单项表示.

(**提示**：在证明 ψ^G 不可约时可利用习题 2.3 的第 5 题的结果.)

3. 设 $G=A_4$，设 $H=\{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$，设 ψ 是 H 的任一非平凡的 1 次复表示，证明：ψ^G 是 G 的 3 次不可约复表示，从而 G 的唯一的一个 3 次不可约复表示是单项表示.

4. 设 G 是习题 3.3 第 7 题中的 21 阶群，它是 3 阶群 $H=\langle b\rangle$ 与 7 阶群 $N=\langle a\rangle$ 的半直积，其中 N 可看成 G 的正规子群，并且 $bab^{-1}=a^2$. 设 ψ_1,ψ_2 都是 N 的 1 次复表示，其中 $\psi_1(a)=\xi=e^{\frac{2\pi}{7}i}$，$\psi_2(a)=\xi^3$. 证明：$\psi_1^G$ 和 ψ_2^G 都是 G 的 3 次不可约复表示，并且它们不等价，从而 G 的仅有的两个 3 次不可约复表示都是单项表示.

§3 Frobenius 互反律

本节将证明关于诱导特征标和诱导表示的一个重要定律：Frobenius 互反律.

定理 5.3.1（Frobenius 互反律） 设 G 是有限群，$H<G$，设域 K 的特征不能整除 $|G|$，设 μ 是 H 的特征标，χ 是 G 的特征标，则

$$\langle\mu^G,\chi\rangle_G=\langle\mu,\chi|H\rangle_H. \tag{1}$$

证明

$$\begin{aligned}
\langle\mu^G,\chi\rangle_G &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mu^G(g)\chi(g^{-1})\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left(\frac{1}{|H|}\sum_{a\in G}\dot{\mu}(a^{-1}ga)\right)\chi(g^{-1})\\
&= \frac{1}{|G|\cdot|H|}\sum_{a\in G}\sum_{g\in G}\dot{\mu}(a^{-1}ga)\chi(g^{-1})\\
&= \frac{1}{|G|\cdot|H|}\sum_{a\in G}\sum_{y\in G}\dot{\mu}(y)\chi(ay^{-1}a^{-1})\\
&= \frac{1}{|G|\cdot|H|}\sum_{a\in G}\sum_{y\in G}\dot{\mu}(y)\chi(y^{-1})\\
&= \frac{1}{|H|}\sum_{y\in G}\dot{\mu}(y)\chi(y^{-1})\\
&= \frac{1}{|H|}\sum_{y\in H}\mu(y)\chi(y^{-1})=\langle\mu,\chi|H\rangle_H. \qquad ▌
\end{aligned}$$

由定理 5.3.1 可以得到用诱导表示的形式表达的 Frobenius

互反律：

定理 5.3.2（Frobenius 互反律） 设 G 是有限群，$H<G$，设 K 是 G 和 H 的分裂域，并且 $\mathrm{char}K=0$. 设 ψ 是 H 的不可约 K-表示，φ 是 G 的不可约 K-表示，则 φ 在 ψ^G 中的重数等于 ψ 在 $\varphi|H$ 中的重数. ▌

下面给出 Frobenius 互反律的一些应用.

例 5.3.1 设 G 是有限 abel 群，$H<G$，则 H 的每一个不可约复特征标 μ 是 G 的某一个不可约复特征标 χ 在 H 上的限制.

证明 因为 G 是 abel 群，所以 G 和 H 的不可约复表示都是 1 次的. 取 μ^G 所包含的一个不可约复特征标 χ，即，$(\mu^G,\chi)_G>0$. 由 Frobenius 互反律得

$$(\mu,\chi|H)_H=(\mu^G,\chi)_G>0,$$

这说明 μ 在 $\chi|H$ 中出现. 又由于 χ 是 1 次的，所以 $\chi|H$ 是 H 的不可约复特征标. 据第一正交关系得，$\mu=\chi|H$. ▌

例 5.3.2 设 G 是有限 abel 群，$H<G$，χ 是 G 的复特征标，如果对于 $g\overline{\in}H$ 有 $\chi(g)=0$，则 $[G:H]|\chi(1)$.

证明 设 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_s$ 是 H 的全部不同的不可约复特征标，据例 5.3.1，对于每一个 μ_i，存在 G 的不可约复特征标 χ_i 使得 $\mu_i=\chi_i|H$.

设 $\chi|H=\sum\limits_{i=1}^{s}m_i\mu_i$，则 $\chi(1)=\sum\limits_{i=1}^{s}m_i\mu_i(1)=\sum\limits_{i=1}^{s}m_i$. 因为

$$\begin{aligned}(\chi,\chi_i)_G&=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\chi_i(g^{-1})=\frac{1}{|G|}\sum_{h\in H}\chi(h)\chi_i(h^{-1})\\&=\frac{|H|}{|G|}(\chi|H,\chi_i|H)_H=\frac{1}{[G:H]}(\chi|H,\mu_i)_H\\&=\frac{m_i}{[G:H]},\end{aligned}$$

所以 $[G:H]|m_i(i=1,2,\cdots,s)$. 从而 $[G:H]|\chi(1)$. ▌

我们把群 G 的所有不可约复表示的次数中最大者记作 $m(G)$.

例 5.3.3 对于有限群 G 的任一子群 H 有

$$m(H) \leqslant m(G) \leqslant [G:H]m(H). \tag{2}$$

如果 H 是 G 的 abel 子群，则 $m(G) \leqslant [G:H]$.

证明 设 μ 是 H 的不可约复特征标，其次数为 $m(H)$. 取 μ^G 所包含的 G 的一个不可约复特征标 χ，则

$$(\mu, \chi|H)_H = (\mu^G, \chi)_G > 0,$$

从而 μ 在 $\chi|H$ 中出现，所以 $\mu(1) \leqslant (\chi|H)(1) = \chi(1) \leqslant m(G)$.

设 χ 是 G 的不可约复特征标，其次数为 $m(G)$. 取 $\chi|H$ 所包含的 H 的一个不可约复特征标 μ，则

$$(\mu^G, \chi)_G = (\mu, \chi|H)_H > 0.$$

从而 χ 在 μ^G 中出现，所以

$$m(G) = \chi(1) \leqslant \mu^G(1) = [G:H]\mu(1) \leqslant [G:H]m(H).$$

如果 H 是 abel 子群，则 $m(H)=1$，从而 $m(G) \leqslant [G:H]$. ∎

例 5.3.4 设 G 是有限群，P 是 G 的 Sylow p-子群，如果 P 是 abel 群，则 $p \nmid |G' \cap Z(G)|$.

证明 假如 $p \mid |G' \cap Z(G)|$，则 $G' \cap Z(G)$ 有一个 p 阶子群 H. 设 $H \subset P_1$，其中 P_1 是 G 的一个 Sylow p-子群. 因为 P_1 与 P 在 G 中共轭，所以 P_1 也是 abel 群. 取 H 的一个非平凡的 1 次复特征标 ν，则 P_1 中存在不可约复特征标 μ 使得 $\nu = \mu|H$. 设 $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_s$ 是 G 的所有不同的不可约复特征标，设 $\mu^G = \sum_{i=1}^{s} m_i\chi_i$. 因为 μ 是 1 次的，所以 μ^G 的次数为 $[G:P_1]$. 又由上式知：$\mu^G(1) = \sum_{i=1}^{s} m_i\chi_i(1)$. 因此得到

$$[G:P_1] = \sum_{i=1}^{s} m_i\chi_i(1).$$

由于 $p \nmid [G:P_1]$，所以一定有一个 j 使得 $m_j > 0$ 并且 $p \nmid \chi_j(1)$. 由 Frobenius 互反律得

$$(\mu, \chi_j|P_1)_{P_1} = (\mu^G, \chi_j)_G = m_j > 0,$$

这说明 μ 在 $\chi_j|P_1$ 中出现. 限制到 H 上,便得到: $\mu|H$ 在 $\chi_j|H$ 中出现,即 ν 在 $\chi_j|H$ 中出现.

设 χ_j 是 G 的不可约复表示 (φ_j,V) 提供的特征标,设 $H=\langle a\rangle$. 因为 $H\subset Z(G)$,所以 $\varphi_j(a)$ 与一切 $\varphi_j(g)$ 可交换,从而有 $\varphi_j(a)=\lambda\cdot 1_V$,其中 λ 是某个复数. 因为 $a^p=1$,所以 $\lambda^p=1$. 又有

$$\varphi_j(g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1})=\varphi_j(g_1)\varphi_j(g_2)\varphi_j(g_1)^{-1}\varphi_j(g_2)^{-1},$$
$$\forall\, g_i\in G, i=1,2.$$

设 φ_j 提供的矩阵表示为 Φ,则

$$|\Phi_j(g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1})|=|\Phi_j(g_1)||\Phi_j(g_2)||\Phi_j(g_1)|^{-1}|\Phi_j(g_2)|^{-1}=1.$$

因为 $H\subset G'$,所以由上式知 $|\Phi_j(a)|=1$. 记 $n_j=\chi_j(1)$,则 $|\Phi_j(a)|=\lambda^{n_j}$,于是得到 $\lambda^{n_j}=1$. 上面又指出 $\lambda^p=1$. 由于 $p\nmid\chi_j(1)$,于是得到 $\lambda=1$. 从而 $\varphi_j(a)=1_V$. 由此得出

$$(\chi_j|H)(a)=n_j=n_j1_H(a)=(n_j1_H)(a),$$

其中 1_H 是 H 的主特征标. 上式说明 $\chi_j|H=n_j1_H$. 这与 ν 在 $\chi_j|H$ 中出现矛盾. 因此 $p\nmid|G'\cap Z(G)|$. ▌

习　题　5.3

1. 设 $G=S_4$,记 $N=\{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$. 显然 $N\lhd S_4$. 令 $H=\langle(12)\rangle\cdot N$.

(1) 证明: $H\cong D_4$,其中 D_4 是 8 阶二面体群;

(2) 证明: S_4 的两个 3 次不可约复特征标分别是 H 的某两个 1 次复特征标的诱导特征标;

(3) 证明: S_4 的 2 次不可约复特征标是 A_4 的非平凡的 1 次复特征标的诱导特征标.

*2. 设 K 是任一域,G 是有限群,设 V,U 都是左 $K[G]$-模,并且 $\dim_K V<\infty$, $\dim_K U<\infty$.

(1) 证明: $\mathrm{Hom}_{K[G]}(V,U)$ 是域 K 上的有限维向量空间,它的维数称为 V 和 U 的**交结数**(intertwining number),记作 $i(V,U)$;

(2) 设 $\mathrm{char}K\nmid|G|$,并且 K 是 G 的分裂域,设 V,U 都是不可

约左 $K[G]$-模，它们提供的 G 的表示分别为 φ,ψ，证明：$i(V,U)=(\chi_\varphi,\chi_\psi)$.

(3) 设 V,U 提供的 G 的 K-表示分别为 φ,ψ，设 φ,ψ 提供的矩阵表示分别为 Φ,Ψ. 矩阵 B 如果满足

$$B\Phi(g)=\Psi(g)B,\quad \forall\, g\in G,$$

则称 B 是 Φ 和 Ψ 的**交结矩阵**. 用 S 表示 Φ 和 Ψ 的所有交结矩阵组成的集合，证明：S 是域 K 上的向量空间，并且

$$\dim_K S=i(V,U).$$

*3. 设 K 是任一域，G 是有限群，V 是左 $K[G]$-模. V 中元素 α 称为 G 不变的，如果对一切 $g\in G$ 有 $g\alpha=\alpha$. V 的所有 G 不变元素组成的集合记作 V_0. 证明：V_0 是 V 的子模.

*4. 设 K 是任一域，G 是有限群，V,U 都是左 $K[G]$-模，设 $\dim_K V=n,\dim_K U=m$. 用 V^* 表示 V 的对偶空间，据第一章 § 2 可知，V^* 可以成为左 $K[G]$-模. 证明：

(i) $V^*\otimes_K U\cong \mathrm{Hom}_K(V,U)$（向量空间的同构）；

(ii) $i(V,U)=\dim_K(V^*\otimes_K U)_0$，其中 $(V^*\otimes_K U)_0$ 是左 $K[G]$-模 $V^*\otimes_K U$ 的所有 G 不变元组成的集合.

（**提示**：(i) 对于 $f\in V^*,u\in U$，定义 V 到 U 的映射

$$\sigma_{f,u}(v)\ :=f(v)u,\quad \forall\, v\in V.$$

验证 $\sigma_{f,u}\in\mathrm{Hom}_K(V,U)$. 验证 $(f,u)\mapsto\sigma_{f,u}$ 是 $V^*\times U$ 到 $\mathrm{Hom}_K(V,U)$ 的平衡映射，从而存在 $V^*\otimes_K U$ 到 $\mathrm{Hom}_K(V,U)$ 的群同态 ξ 使得 $\xi(f\otimes u)=\sigma_{f,u}$. 验证 ξ 是向量空间 $V^*\otimes_K U$ 到 $\mathrm{Hom}_K(V,U)$ 的线性映射，证明 ξ 是双射，从而 ξ 是同构.

(ii) 只要证 $(V^*\otimes_K U)_0\cong\mathrm{Hom}_{K[G]}(V,U)$. 为此只要证：

$$\sigma_{f,u}\in\mathrm{Hom}_{K[G]}(V,U)\iff g(f\otimes u)=f\otimes u,\quad \forall\, g\in G.$$

注意利用逆步表示的定义：$(gf)(v)\ :=f(g^{-1}v)$.）

*5. 设 K 是任一域，G 是有限群，V,U 都是左 $K[G]$-模，设 $\dim_K V=n,\dim_K W=m$. 如果 $V=V_1\oplus V_2$，其中 V_1,V_2 是 V 的子模. 证明：

$$i(V,U) = i(V_1,U) + i(V_2,U).$$

(**提示**：利用第4题的结果.)

注 第5题中，若V_1,V_2都是左$K[G]$-模，则有

$$i(V_1 + V_2,U) = i(V_1,U) + i(V_2,U).$$

*6. 设G是有限群，K是G的分裂域. 设V是完全可约左$K[G]$-模，U是不可约左$K[G]$-模，并且$\dim_K V<\infty$，$\dim_K U<\infty$. 证明：

(i) U在V中的重数等于$i(V,U)$；

(ii) V不可约当且仅当$i(V,V)=1$.

(**提示**：(i) 利用第5题结果和推论4.3.6以及引理2.2.6；(ii) 利用本题(i)的结论.)

*7. 设G是有限群，域K的特征不能整除$|G|$. 设V和U是两个左$K[G]$-模，并且$\dim_K V<\infty$，$\dim_K U<\infty$. 证明：

$$i(V,U) = i(U,V).$$

(**提示**：第一步证$(V^*\otimes_K U)^*\cong U^*\otimes_K V$，这是向量空间同构，并且是$K[G]$-模同构；第二步证$[(V^*\otimes_K U)^*]_0\cong(U^*\otimes_K V)_0$；第三步证$[(V^*\otimes_K U)^*]_0$的维数等于$\dim_K(V^*\otimes_K U)_0$.)

*8. 设G是有限群，K是G的分裂域并且$\mathrm{char}K=0$. 设V,U都是左$K[G]$-模，并且$\dim_K V<\infty$，$\dim_K U<\infty$，它们提供的G的表示分别为φ,ψ，证明：

$$i(V,U) = \langle\chi_\varphi,\chi_\psi\rangle.$$

(**提示**：利用第6题和第5题的结果.)

*9. 设G是有限群，$H<G$，设K是G和H的分裂域，并且$\mathrm{char}K=0$. 设V是左$K[G]$-模，W是左$K[H]$-模，并且$\dim_K V<\infty$，$\dim_K W<\infty$. 证明：

$$i(W^G,V) = i(W,V\,|\,K[H]),$$

其中$V\,|\,K[H]$表示把V限制成左$K[H]$-模.

(**提示**：利用第8题结果和Frobenius互反律.)

§ 4　诱导类函数

本节将把本章§2和§3关于诱导特征标的结果推广到类函数上，这样将会有更广泛的应用.

从定理3.2.7和定理4.3.2知道，如果K是有限群G的分裂域并且$\mathrm{char}K \nmid |G|$，则G的所有不相等的不可约特征标$\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_r$是$G$的类函数空间$Cf_K(G)$的一个$K$-基.因此，从这条途径可以把§2和§3关于诱导特征标的结果推广到类函数上.我们在下面将给出另一条途径，即，模拟§2诱导特征标的公式(3)给出诱导类函数的定义，然后从此定义出发来推导诱导类函数的性质.

定义1　设G是有限群，$H<G$，设域K的特征不能整除$|G|$.设η是H上的类函数，考虑G上的一个函数η^G，它由下式定义：

$$\eta^G(g) := \frac{1}{|H|}\sum_{a\in G}\dot{\eta}(a^{-1}ga),\quad \forall\, g\in G, \tag{1}$$

其中

$$\dot{\eta}(y) = \begin{cases}\eta(y), & 当\ y\in H,\\ 0, & 当\ y\overline{\in} H;\end{cases} \tag{2}$$

易看出η^G是G上的类函数，称η^G是η的**诱导类函数**.

诱导类函数有下列性质：

命题5.4.1(传递性)　设G是有限群，设域K的特征不能整除$|G|$，设H,L都是G的子群，并且$H<L$.设η是H上的类函数，则

$$(\eta^L)^G = \eta^G. \tag{3}$$

证明　任取$g\in G$，如果$g\in L$，则

$$\eta^L(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{a\in L}\dot{\eta}(a^{-1}ga);$$

如果$g\overline{\in} L$，则对一切$a\in L$有$a^{-1}ga\overline{\in} L$.由于$H<L$，因此$a^{-1}ga\overline{\in} H$，从而$\dot{\eta}(a^{-1}ga)=0$.类似于(2)式可定义函数$(\dot{\eta^L})$，对于$g\overline{\in}$

L，有$(\dot{\eta}^L)(g)=0$. 从而对一切 $g\in G$ 有

$$(\dot{\eta}^L)(g)=\frac{1}{|H|}\sum_{a\in L}\dot{\eta}(a^{-1}ga). \tag{4}$$

于是对一切 $g\in G$ 有

$$\begin{aligned}(\eta^L)^G(g)&=\frac{1}{|L|}\sum_{b\in G}(\dot{\eta}^L)(b^{-1}gb)\\&=\frac{1}{|L|}\cdot\frac{1}{|H|}\sum_{b\in G}\sum_{a\in L}\dot{\eta}(a^{-1}b^{-1}gba)\\&=\frac{1}{|L|}\cdot\frac{1}{|H|}\sum_{a\in L}\sum_{b\in G}\dot{\eta}((ba)^{-1}g(ba))\\&=\frac{1}{|L|}\cdot\frac{1}{|H|}\sum_{a\in L}\sum_{t\in G}\dot{\eta}(t^{-1}gt)\\&=\frac{1}{|L|}\sum_{a\in L}\eta^G(g)=\eta^G(g).\end{aligned}$$

由此即得(3)式. ∎

命题 5.4.2 设 G 是有限群，$\mathrm{char}K\nmid|G|$，$H<G$，设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 都是 H 的类函数，设 $k_i\in K$，$1\leqslant i\leqslant r$，则

$$\Big(\sum_{i=1}^{r}k_i\eta_i\Big)^G=\sum_{i=1}^{r}k_i\eta_i^G. \tag{5}$$

证明 任意 $g\in G$，有

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{i=1}^{r}k_i\eta_i\Big)^G(g)&=\frac{1}{|H|}\sum_{a\in G}\Big(\dot{\sum_{i=1}^{r}k_i\eta_i}\Big)(a^{-1}ga)\\&=\frac{1}{|H|}\sum_{a\in G}\sum_{i=1}^{r}k_i\dot{\eta}_i(a^{-1}ga)\\&=\sum_{i=1}^{r}k_i\frac{1}{|H|}\sum_{a\in G}\dot{\eta}_i(a^{-1}ga)\\&=\sum_{i=1}^{r}k_i\eta_i^G(g)=\Big(\sum_{i=1}^{r}k_i\eta_i^G\Big)(g),\end{aligned}$$

从而(5)式成立. ∎

命题 5.4.3 设 G 是有限群，$\mathrm{char}K\nmid|G|$，$H<G$，设 η 是 H 的类函数，ξ 是 G 的类函数，则

$$\eta^G \cdot \xi = (\eta \cdot \xi | H)^G. \tag{6}$$

证明 任意 $g \in G$，有

$$\begin{aligned}
(\eta \cdot \xi | H)^G(g) &= \frac{1}{|H|}\sum_{a\in G}(\eta \cdot \dot{\xi}|H)(a^{-1}ga) \\
&= \frac{1}{|H|}\sum_{a\in G}\dot{\eta}(a^{-1}ga)(\xi \dot{|} H)(a^{-1}ga) \\
&= \frac{1}{|H|}\sum_{a\in G}\dot{\eta}(a^{-1}ga)\xi(a^{-1}ga) \\
&= \frac{1}{|H|}\sum_{a\in G}\dot{\eta}(a^{-1}ga)\xi(g) \\
&= \eta^G(g)\xi(g) = (\eta^G\xi)(g),
\end{aligned}$$

由此即得(6)式. ▌

定理 5.4.1（Frobenius 互反律） 设 G 是有限群，$H<G$，$\mathrm{char}K \nmid |G|$，设 η 是 H 的类函数，ξ 是 G 的类函数，则

$$\langle \eta^G, \xi \rangle_G = \langle \eta, \xi | H \rangle_H. \tag{7}$$

当 K 是复数域时，有

$$(\eta^G, \xi)_G = (\eta, \xi | H)_H. \tag{8}$$

证明 (7)式的证明与定理 5.3.1 的证明完全一样. 现在设 K 为复数域，我们有

$$\begin{aligned}
(\eta^G, \xi)_G &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\eta^G(g)\overline{\xi(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left(\frac{1}{|H|}\sum_{a\in G}\dot{\eta}(a^{-1}ga)\right)\overline{\xi(g)} \\
&= \frac{1}{|G|\cdot|H|}\sum_{a\in G}\sum_{g\in G}\dot{\eta}(a^{-1}ga)\overline{\xi(g)} \\
&= \frac{1}{|G|\cdot|H|}\sum_{a\in G}\sum_{y\in G}\dot{\eta}(y)\overline{\xi(aya^{-1})} \\
&= \frac{1}{|G|\cdot|H|}\sum_{a\in G}\sum_{y\in G}\dot{\eta}(y)\overline{\xi(y)} = \frac{1}{|H|}\sum_{y\in G}\dot{\eta}(y)\overline{\xi(y)} \\
&= \frac{1}{|H|}\sum_{y\in H}\eta(y)\overline{\xi(y)} = (\eta, \xi | H)_H.
\end{aligned}$$ ▌

下面给出诱导类函数的另外两个计算公式.

命题 5.4.4 设 G 是有限群，$\mathrm{char}K \nmid |G|$，$H<G$，设 $\{g_1=1,$

$g_2,\cdots,g_t\}$是H在G中的左陪集代表系，设η是H的类函数，则

$$\eta^G(g) = \sum_{i=1}^{t}\dot{\eta}(g_i^{-1}gg_i), \quad \forall\, g \in G. \tag{9}$$

证明 显然，对一切$g\in G,h\in H$，有

$$\dot{\eta}(h^{-1}gh) = \dot{\eta}(g). \tag{10}$$

任意$y\in g_iH$，设$y=g_ih$，其中$h\in H$. 由(10)式得

$$\dot{\eta}(y^{-1}gy) = \dot{\eta}(h^{-1}g_i^{-1}gg_ih) = \dot{\eta}(g_i^{-1}gg_i), \quad \forall\, g \in G.$$

从而对一切$g\in G$，有

$$\eta^G(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{a\in G}\dot{\eta}(a^{-1}ga) = \frac{1}{|H|}\sum_{i=1}^{t}\sum_{a\in g_iH}\dot{\eta}(a^{-1}ga)$$

$$= \frac{1}{|H|}\sum_{i=1}^{t}\sum_{a\in g_iH}\dot{\eta}(g_i^{-1}gg_i) = \sum_{i=1}^{t}\dot{\eta}(g_i^{-1}gg_i). \quad \blacksquare$$

命题 5.4.5 设G是有限群，$\mathrm{char}K\nmid|G|$，$H<G$. 设C是G的一个共轭类，η是H的类函数.

(i) 若$C\cap H=\varnothing$，则对于$g\in C$有$\eta^G(g)=0$;

(ii) 若$C\cap H\neq\varnothing$，显然$C\cap H$是H的若干个共轭类的并集，设$C\cap H$包含的H的共轭类的代表系是：$h_1,h_2,\cdots,h_r$，则对于$g\in C$，有

$$\eta^G(g) = |C_G(g)|\cdot\sum_{i=1}^{r}\frac{\eta(h_i)}{|C_H(h_i)|}. \tag{11}$$

证明 (i) 若$C\cap H=\varnothing$，则对于$g\in C$，任意$a\in G$，有$a^{-1}ga\in C$，从而$a^{-1}ga\notin H$，因此

$$\eta^G(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{a\in G}\dot{\eta}(a^{-1}ga) = 0.$$

(ii) 设$C\cap H\neq\varnothing$，取$g\in C$，取定一个$y\in G$，任取$x\in G$，因为

$$x^{-1}gx = y^{-1}gy \iff yx^{-1}gxy^{-1} = g \iff xy^{-1} \in C_G(g),$$

所以G中使得$x^{-1}gx=y^{-1}gy$的x有$|C_G(g)|$个. 把H中包含h_i的共轭类记作$B_i(i=1,2,\cdots,r)$，我们有

$$\eta^G(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\dot{\eta}(x^{-1}gx) = \frac{1}{|H|}\sum_{z\in C}|C_G(g)|\dot{\eta}(z)$$

$$= \frac{|C_G(g)|}{|H|}\sum_{z\in C\cap H}\eta(z) = \frac{|C_G(g)|}{|H|}\sum_{i=1}^{r}\sum_{z\in B_i}\eta(z)$$

$$= \frac{|C_G(g)|}{|H|}\sum_{i=1}^{r}\sum_{z\in B_i}\eta(h_i) = \frac{|C_G(g)|}{|H|}\sum_{i=1}^{r}|B_i|\eta(h_i)$$

$$= |C_G(g)|\sum_{i=1}^{r}\frac{\eta(h_i)}{|C_H(h_i)|}. \quad \blacksquare$$

诱导类函数的上述性质和计算公式都是从其定义出发推导出来的，而诱导类函数的定义与§2诱导特征标的公式(3)是一样的，因此上述诱导类函数的性质和计算公式对于诱导特征标也成立. 这样也就给出了诱导特征标性质的另一种证明，而§2中关于诱导特征标的许多性质是从诱导表示的性质直接得出的.

现在我们利用命题5.4.5来造 A_5 的复特征标表，我们在第四章§3已经求出 A_5 的复特征标表，那时关键一步是用到 A_5 与正十二面体的旋转对称群同构，现在我们不用这一点，而用 A_5 的某个子群的不可约复表示诱导出 A_5 的一个表示，然后再分解它.

例 5.4.1 求 A_5 的复特征标表.

解 第四章§3例4.3.3已指出：A_5 只有一个1次表示，即，主表示 φ_1，其特征标记作 χ_1. A_5 的5个共轭类 C_1,C_2,C_3,C_4,C_5 的代表元依次为：(1)，(12)(34)，(123)，(12345)，(13524). 各类元素数目依次为：1，15，20，12，12. 利用双传递群的性质，可得到 A_5 的一个4次不可约复表示 φ_2，其特征标 χ_2 在上述5个共轭类的元素上取值为

$$(4,0,1,-1,-1).$$

我们可以把 A_4 看成 A_5 的子群，取 A_4 的一个非平凡1次复特征标 ν，它在 A_4 的共轭类的代表元(1)，(12)(34)，(123)，(132)上取的值为 $(1,1,\omega,\omega^2)$，其中 $\omega=e^{i\frac{2\pi}{3}}$. 记 $G=A_5$. 因为 $[G:A_4]=\frac{60}{12}=5$，所以 $\nu^G(1)=5$. 因为

$$C_2\cap A_4=\{(12)(34),(13)(24),(14)(23)\},$$

所以

$$\nu^G((12)(34)) = \frac{60}{15}\cdot\frac{\nu((12)(34))}{4} = 1.$$

因为 $C_3 \cap A_4$ 是 A_4 的两个共轭类的并，所以

$$\nu^G((123)) = \frac{60}{20}\left[\frac{\nu((123))}{3} + \frac{\nu((132))}{3}\right] = \omega + \omega^2 = -1.$$

又因为 $C_4 \cap A_4 = \varnothing, C_5 \cap A_4 = \varnothing$，所以

$$\nu^G((12345)) = 0, \quad \nu^G((13524)) = 0.$$

于是 ν^G 为 $(5,1,-1,0,0)$. 由于

$$(\nu^G,\nu^G)_G = \frac{1}{60}[5^2 + 15\cdot 1^2 + 20\cdot(-1)^2 + 12\cdot 0 + 12\cdot 0] = 1,$$

所以 ν^G 是 G 的不可约特征标，把 ν^G 记成 χ_3.

取 A_5 的子群 $H = \langle(12345)\rangle$，取 H 的一个非平凡的 1 次复特征标 μ，它在 H 的元素 $1,(12345),(13524),(14253),(15432)$ 上的值依次为：$1,\varepsilon,\varepsilon^2,\varepsilon^3,\varepsilon^4$，其中 $\varepsilon = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. 显然有 $\mu^G(1) = 12$. 因为 $C_2 \cap H = \varnothing, C_3 \cap H = \varnothing$，所以 $\mu^G((12)(34)) = 0, \mu^G((123)) = 0$.
容易求出

$$C_4 \cap H = \{(12345),(15432)\},$$
$$C_5 \cap H = \{(13524),(14253)\}.$$

所以

$$\mu^G((12345)) = \frac{60}{12}\left(\frac{\mu((12345))}{5} + \frac{\mu((15432))}{5}\right) = \varepsilon + \varepsilon^4;$$

$$\mu^G((13524)) = \frac{60}{12}\left(\frac{\mu((13524))}{5} + \frac{\mu((14253))}{5}\right) = \varepsilon^2 + \varepsilon^3.$$

于是 μ^G 在 G 的各个共轭类上的值为

$$(12,0,0,\varepsilon + \varepsilon^4,\varepsilon^2 + \varepsilon^3).$$

因为

$$(\mu^G,\chi_1)_G = (\mu,\chi_1|H)_H = \frac{1}{5}[1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4] = 0,$$

$$(\mu^G,\chi_2)_G = (\mu,\chi_2|H)_H = \frac{1}{5}[1\cdot 4 + \varepsilon(-1) + \varepsilon^2(-1)$$

$$+\varepsilon^3(-1)+\varepsilon^4(-1)]=1,$$

$$(\mu^G,\chi_3)_G=(\mu,\chi_3|H)_H=\frac{1}{5}[1\cdot 5+\varepsilon\cdot 0+\varepsilon^2\cdot 0$$

$$+\varepsilon^3\cdot 0+\varepsilon^4\cdot 0]=1,$$

所以 χ_1 在 μ^G 中不出现，χ_2,χ_3 在 μG中都出现 1 次. 于是，$\mu^G-\chi_2-\chi_3$ 为 G 的特征标，它的值为

$$(3,-1,0,1+\varepsilon+\varepsilon^4,1+\varepsilon^2+\varepsilon^3).$$

因为

$$\frac{1}{60}[3^2+15\cdot(-1)^2+20\cdot 0+12(1+\varepsilon+\varepsilon^4)(1+\bar{\varepsilon}+\bar{\varepsilon}^4)$$

$$+12(1+\varepsilon^2+\varepsilon^3)(1+\bar{\varepsilon}^2+\bar{\varepsilon}^3)]$$

$$=\frac{1}{60}[24+12(2+\varepsilon+\varepsilon^4)+12(2+\varepsilon^2+\varepsilon^3)]=1,$$

所以 $\mu^G-\chi_2-\chi_3$ 是 G 的不可约特征标，记作 χ_4，其中

$$1+\varepsilon+\varepsilon^4=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}),\quad 1+\varepsilon^2+\varepsilon^3=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}).$$

从 $1^2+4^2+5^2+3^2+m^2=60$ 得出 $m=3$. 然后利用第二正交关系可求出 χ_5，从而完成 A_5 的复特征标表. 这个表在例 4.3.3 中已写出.

习 题 5.4

1. 在四元数除环 $\boldsymbol{H}$ 里，四元数群$\{\pm 1,\pm i,\pm j,\pm k\}$记作 N；令 G 是 N 与 16 个元素$(\pm 1\pm i\pm j\pm k)/2$ 的并集.

(1) 证明：G 是 $\boldsymbol{H}$ 的乘法群 $\boldsymbol{H}^*$ 的子群；

(2) 证明：$N\lhd G$；设 $y=-\frac{1}{2}(1+i+j+k)$，证明：G 是 N 与 $\langle y\rangle$的半直积；

(3) 求 $Z(G)$，以及 G 的共轭类；

(4) 利用 G/N 的不可约复表示求 G 的一些不可约复表示；

(5) 设

$$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad I=\begin{pmatrix}\sqrt{-1}&0\\0&-\sqrt{-1}\end{pmatrix},$$

$$J=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix}0&\sqrt{-1}\\\sqrt{-1}&0\end{pmatrix},$$

令
$$f:\boldsymbol{H}\to M_2(\boldsymbol{C}),$$
$$a+bi+cj+dk\mapsto aE+bI+cJ+dK,$$
其中 a,b,c,d 是任意实数.证明：f 在 G 上的限制是 G 的一个 2 次不可约复矩阵表示，并求出它提供的特征标；

(6) 求 G 的复特征标表；

(7) 证明：G 的 3 次不可约复表示是单项表示.

§5 Mackey 的子群定理

设 H 是有限群 G 的子群，$\mathrm{char}K\nmid|G|$，设 η 是 H 的类函数，自然会问：$\eta^G|H=?$ 更一般地，设 L 也是 G 的子群，那么 $\eta^G|L=?$ 这一节来讨论这个问题.

从 H 的类函数 η 可以得到 H 的任一共轭子群 gHg^{-1} 上的函数，记作 η^g，其定义是：

$$\eta^g(y):=\eta(g^{-1}yg),\quad\forall\ y\in gHg^{-1},\tag{1}$$

易验证 η^g 是 gHg^{-1}的类函数.

定理 5.5.1（Mackey 子群定理） 设 G 是有限群，域 K 的特征不能整除 $|G|$，H,L 都是 G 的子群，设 $\{g_1,g_2,\cdots,g_t\}$ 是 (L,H) 在 G 里的双陪集代表系，即

$$G=Lg_1H\cup Lg_2H\cup\cdots\cup Lg_tH;$$

令 $L_i=L\cap g_iHg_i^{-1}(i=1,2,\cdots,t)$；设 η 是 H 的类函数，λ 是 L 的类函数，把 η^{g_i}简记成 $\eta^{(i)}$，则

(i) $$\eta^G|L=\sum_{i=1}^{t}(\eta^{(i)}|L_i)^L;\tag{2}$$

(ii) $\langle\lambda^G,\eta^G\rangle_G=\sum_{i=1}^{t}\langle\lambda\,|\,L_i,\eta^{(i)}\,|\,L_i\rangle_{L_i}.$ (3)

证明 (i) 从命题 5.4.4 的公式(9)知道，为了计算 η^G，应当知道 H 在 G 中的左陪集代表系；为了计算 $(\eta^{(i)}\,|\,L_i)^L$，应当知道 L_i 在 L 中的左陪集代表系. 任取一个双陪集 Lg_iH，显然它是 H 的若干个左陪集的并. 取定 $y_0\in L$，对于 $y\in L$，我们有

$$yg_iH=y_0g_iH\Longleftrightarrow(y_0g_i)^{-1}(yg_i)\in H\Longleftrightarrow y_0^{-1}y\in g_iHg_i^{-1}$$
$$\Longleftrightarrow y_0^{-1}y\in L\cap g_iHg_i^{-1}\Longleftrightarrow y\in y_0L_i.$$

这说明：如果 L_i 在 L 中的左陪集代表系为 $\{y_{i1},y_{i2},\cdots,y_{ir_i}\}$，则 H 在 G 中的左陪集代表系里的元素出现在 Lg_iH 里的是：$\{y_{i1}g_i,y_{i2}g_i,\cdots,y_{ir_i}g_i\}$. 从而 H 在 G 中的左陪集代表系是：

$$\{y_{ij_i}g_i\,|\,1\leqslant i\leqslant t,\ 1\leqslant j_i\leqslant r_i\}.$$

任意 $y\in L$，显然有

$$(y_{ij_i}g_i)^{-1}y(y_{ij_i}g_i)\in H\Longleftrightarrow y_{ij_i}^{-1}yy_{ij_i}\in g_iHg_i^{-1}\cap L.$$

从而得

$$\eta^G(y)=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j_i=1}^{r_i}\dot{\eta}\left[(y_{ij_i}g_i)^{-1}y(y_{ij_i}g_i)\right]=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j_i=1}^{r_i}\dot{\eta}^{(i)}(y_{ij_i}^{-1}yy_{ij_i})$$
$$=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j_i=1}^{r_i}(\eta^{(i)}\,|\,L_i)^{\cdot}\,(y_{ij_i}^{-1}yy_{ij_i})=\sum_{i=1}^{t}(\eta^{(i)}\,|\,L_i)^L(y).$$

由此即得(2)式.

(ii) 利用公式(2)和 Frobenius 互反律得

$$\langle\lambda^G,\eta^G\rangle_G=\langle\lambda,\eta^G\,|\,L\rangle_L=\langle\lambda,\sum_{i=1}^{t}(\eta^{(i)}\,|\,L_i)^L\rangle_L=\sum_{i=1}^{t}\langle\lambda,(\eta^{(i)}\,|\,L_i)^L\rangle_L$$
$$=\sum_{i=1}^{t}\langle\lambda\,|\,L_i,\eta^{(i)}\,|\,L_i\rangle_{L_i}.\quad\blacksquare$$

今后我们把群 G 的主表示(主特征标)记作 1_G.

习 题 5.5

1. 设 K 是特征为 0 的代数闭域，H 和 L 都是有限群 G 的子

群，证明：(L,H)在G里的双陪集的数目等于$\langle(1_L)^G,(1_H)^G\rangle_G$.

(**提示**：用 Mackey 子群定理立即得出.)

2. 设K是特征为 0 的代数闭域，H和L都是有限群G的子群. 设$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_s$是$G$的所有不等价的不可约表示，设$1_L$在$\varphi_i|L$里的重数为$a_i$，$1_H$在$\varphi_i|H$里的重数为$b_i$. 把$H$在$G$中的左陪集组成的集合记作$G/H$，对于$x\in L, gH\in G/H$，规定$x(gH):=(xg)H$，这给出了群$L$在$G/H$上的一个作用. 证明：这个作用将$G/H$划分成的轨道的数目$r$等于$\sum\limits_{i=1}^{s}a_ib_i$.

(**提示**：证法一　据推论 3.3.2，r等于1_L在ψ中的重数，其中ψ是由上述作用引起的L的置换表示. 据习题 5.1 的第 3 题知，$\psi\approx(1_H)^G|L$. 于是$r=\langle 1_L,(1_H)^G|L\rangle_L=\langle(1_L)^G,(1_H)^G\rangle_G$. 注意$(1_L)^G$

$$= \sum_{i=1}^{s}\langle(1_L)^G,\chi_i\rangle_G\chi_i = \sum_{i=1}^{s}\langle 1_L,\chi_i|L\rangle_L\chi_i = \sum_{i=1}^{s}a_i\chi_i.$$

证法二　说明L在G/H上作用的轨道数目等于(L,H)在G里的双陪集数目，然后利用第 1 题的结果. 往下同证法一.)

3. 设K是特征为 0 的代数闭域，G是有限群，设G分别传递地作用在有限集合Ω_1和Ω_2上，设H_i是Ω_i的一个元素的稳定子群，设η_i是G在Ω_i上的作用引起的置换特征标，$i=1,2$. 证明：H_1在Ω_2上作用的轨道数目r_1等于H_2在Ω_1上作用的轨道数目r_2，并且$r_i=\langle\eta_1,\eta_2\rangle_G$.

(**提示**：取$x_i\in\Omega_i$，由于G在Ω_i上作用传递，所以G在Ω_i上的作用等价于G在齐性空间G/G_{x_i}上的作用，从而G在G/G_{x_i}上作用引起的置换特征标也是η_i，注意$G_{x_i}=H_i$，并且据习题 5.1 的第 3 题知，$\eta_i=(1_{H_i})^G(i=1,2)$. 利用第 2 题的证法二所得到的事实.)

4. 设K是特征为 0 的代数闭域，设有限群G传递地作用在有限集合Ω上，引起的置换表示记作φ. 证明：对于任意$x\in\Omega$，G_x在Ω上作用的轨道数目$r(x)$等于$\langle\chi_\varphi,\chi_\varphi\rangle_G$. 它与$x$无关，称它是$G$的秩.

（提示：$r(x)=\langle\chi_\varphi|G_x,1_{G_x}\rangle_{G_x}=\langle\chi_\varphi,(1_{G_x})^G\rangle_G=\langle\chi_\varphi,\chi_\varphi\rangle_G$，这里用到了 $\chi_\varphi=(1_{G_x})^G$，这是因为 G 在 Ω 上的作用等价于 G 在 G/G_x 上的作用. 也可用第 3 题结论.）

5. 设有限群 G 传递地作用在有限集合 Ω 上，证明：对于任意 $x\in\Omega$，G_x 在 Ω 上作用的轨道数目 $r(x)$ 为

$$r(x)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|F(g)|^2. \tag{4}$$

（提示：利用第 4 题的结论和命题 3.3.1）.

注 第 3、第 4、第 5 题表明：利用 Frobenius 互反律或 Mackey 子群定理和命题 3.3.1 可以证明传递置换群的秩的公式(4).

§6 Mackey 的诱导特征标不可约性的判定

本节要讨论的问题是：设 H 是有限群 G 的子群，如果 μ 是 H 的不可约特征标，那么什么时候 μ^G 不可约？

一个群的两个特征标 μ_1,μ_2 称为**不相交**，如果它们没有公共的不可约成分，即 $\langle\mu_1,\mu_2\rangle=0$.

第一章 §2 中，我们指出：若 N 是群 G 的正规子群，由 G 中元素 g 将引起 N 的外自同构 τ_g：$x\mapsto g^{-1}xg$，$\forall\ x\in N$. 设 ψ 是 N 的表示，则 ψ 与 τ_g 的合成是 N 的表示，记作 ψ^g，称为 ψ 的共轭表示，于是 $\psi^g(x)=\psi(g^{-1}xg)$，$\forall\ x\in N$.

现在对于 G 的一个子群 H，设 ψ 是 H 的表示，对于给定的 $g\in G$，我们规定 gHg^{-1} 的一个表示，也记作 ψ^g，其定义为：

$$\psi^g(y)\ :=\psi(g^{-1}yg),\quad \forall\ y\in gHg^{-1}, \tag{1}$$

易验证 ψ^g 确实是 gHg^{-1} 的表示. 显然，当 $H\lhd G$ 时，这里定义的 ψ^g 就是 H 的表示，并且它就是上一段所说的 ψ 的共轭表示. 若 ψ 提供的特征标是 η，则 ψ^g 提供的特征标就是 §5 公式(1)定义的 η^g.

命题 5.6.1 设 G 是有限群，$\mathrm{char}K\nmid|G|$，$H<G$，设 μ 是 H

的特征标，则对于 $g\in G$，有

$$\langle \mu^g,\mu^g\rangle_{gHg^{-1}} = \langle \mu,\mu\rangle_H. \tag{2}$$

证明

$$\begin{aligned}\langle \mu^g,\mu^g\rangle_{gHg^{-1}} &= \frac{1}{|gHg^{-1}|}\sum_{y\in gHg^{-1}}\mu^g(y)\mu^g(y^{-1})\\ &= \frac{1}{|gHg^{-1}|}\sum_{y\in gHg^{-1}}\mu(g^{-1}yg)\mu(g^{-1}y^{-1}g)\\ &= \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\mu(h)\mu(h^{-1}) = \langle \mu,\mu\rangle_H.\end{aligned}$$ ▌

定理 5.6.1 设 H 是有限群 G 的子群，K 是 G 和 H 的分裂域并且 $\mathrm{char}K=0$，设 $\{g_1=1,g_2,\cdots,g_t\}$ 是 (H,H) 在 G 里的双陪集代表系，记 $H_i=H\cap g_iHg_i^{-1}$，$i=1,2,\cdots,t$. 设 μ 是 H 的特征标，则 μ^G 不可约当且仅当下列两个条件成立：

(i) μ 不可约；

(ii) 对于每一个 $i(2\leqslant i\leqslant t)$，$H_i$ 的两个特征标 $\mu^{(i)}|H_i$ 和 $\mu|H_i$ 不相交.

证明 据 Mackey 子群定理得

$$\begin{aligned}\langle \mu^G,\mu^G\rangle_G &= \sum_{i=1}^{t}\langle \mu|H_i,\mu^{(i)}|H_i\rangle_{H_i}\\ &= \langle \mu,\mu\rangle_H + \sum_{i=2}^{t}\langle \mu|H_i,\mu^{(i)}|H_i\rangle_{H_i}.\end{aligned}$$

据定理 3.2.5 得

$$\begin{aligned}\mu^G \text{ 不可约 } &\Longleftrightarrow \langle \mu^G,\mu^G\rangle_G = 1\\ &\Longleftrightarrow \langle \mu,\mu\rangle_H + \sum_{i=2}^{t}\langle \mu|H_i,\mu^{(i)}|H_i\rangle_{H_i} = 1.\end{aligned}$$

据命题 3.2.1 可以知道，$\langle \mu,\mu\rangle_H$ 和 $\langle \mu|H_i,\mu^{(i)}|H_i\rangle_{H_i}$ 都是非负整数并且 $\langle \mu,\mu\rangle_H\neq 0$，因此从上述可得

$$\begin{aligned}\mu^G \text{ 不可约} &\Longleftrightarrow \langle \mu,\mu\rangle_H = 1 \text{ 并且} \langle \mu|H_i,\mu^{(i)}|H_i\rangle_{H_i} = 0\\ &\qquad (i=2,3,\cdots,t)\\ &\Longleftrightarrow \mu \text{ 不可约并且 } \mu|H_i \text{ 与 } \mu^{(i)}|H_i \text{ 不相交}\end{aligned}$$

$(i = 2,3,\cdots,t)$. ▌

推论 5.6.1 设 H 是有限群 G 的子群，K 是 G 和 H 的分裂域并且 $\mathrm{char}K=0$，对于 $x\in G$，令 $H_x := H\cap xHx^{-1}$. 设 μ 是 H 的特征标，则 μ^G 不可约当且仅当下列两个条件成立：

(i) μ 不可约；

(ii) 对于每一个 $x\in G\backslash H$，H_x 的两个特征标 $\mu^x|H_x$ 和 $\mu|H_x$ 不相交.

证明 由于 (H,H) 在 G 中的双陪集代表系中除了 g_1 外，其余元素均不属于 H；而且每个 $x\in G\backslash H$，均可作为某个双陪集的代表元，因此由定理 5.6.1 立即得到此推论. ▌

推论 5.6.2 设 H 是有限群 G 的正规子群，K 是 G 和 H 的分裂域并且 $\mathrm{char}K=0$. 设 H 在 G 中的陪集代表系是 $\{g_1=1,g_2,\cdots,g_t\}$，设 μ 是 H 的特征标，则 μ^G 不可约当且仅当 μ 不可约，并且 μ 与 $\mu^{(i)}$ 不相等，其中 $i=2,3,\cdots,t$.

证明 因为 $H\lhd G$，所以 $HgH=gH$，即 (H,H) 的每一个双陪集就是 H 的一个陪集. 显然 $H_i=H\cap g_iHg_i^{-1}=H$，$1\leqslant i\leqslant t$. 对每一个 $i(1\leqslant i\leqslant t)$，$\mu^{(i)}$ 也是 H 的特征标，并且由命题 5.6.1 知道，$\mu^{(i)}$ 不可约当且仅当 μ 不可约. 于是如果 μ 不可约，那么 $\mu^{(i)}$ 与 μ 不相交当且仅当 $\mu^{(i)}$ 与 μ 不相等. 因此从定理 5.6.1 立即得到推论 5.6.2. ▌

注 推论 5.6.2 中的条件“μ 与 $\mu^{(i)}$ 不相等，$2\leqslant i\leqslant t$”也可以换成“对于任意 $x\in G\backslash H$，μ 与 μ^x 不相等”.

推论 5.6.3 设 H 是有限群 G 的正规子群，K 是特征不能整除 $|G|$ 的域，设 $\{g_1,g_2,\cdots,g_t\}$ 是 H 在 G 中的陪集代表系，设 η 是 H 的类函数，则

$$\eta^G|H = \sum_{i=1}^{t}\eta^{(i)}. \tag{3}$$

证明 从 Mackey 子群定理和推论 5.6.2 的证明过程所述的事实立即得到. ▌

今后我们跟第三章§2那样将采用记号Irr(G)表示G的所有不相等的不可约特征标组成的集合(域K从上下文可看出).

习　题　5.6

1. 设G是域$GF(q)$上的一般线性群GL$(2,q)$,考虑它的下述子群

$$H=\left\{\begin{pmatrix}a_1&0\\b&a_2\end{pmatrix}\middle| a_i\in GF(q)^*,\ b\in GF(q),\ i=1,2\right\}.$$

设ε是复数域$\boldsymbol{C}$中的本原$q-1$次单位根,设ρ是$GF(q)$中的本原元素(即ρ是$GF(q)$的乘法群$GF(q)^*$的生成元).循环群$GF(q)^*$的所有不可约复表示记作$\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{q-1}$,它们都是1次的,并且$\psi_j(\rho)=\varepsilon^j$,$\psi_j$的特征标记作$\mu_j(1\leqslant j\leqslant q-1)$.规定

$$\varphi_{ij}:\ \begin{pmatrix}a_1&0\\b&a_2\end{pmatrix}\mapsto\psi_i(a_1)\otimes\psi_j(a_2),$$

据习题4.2的第3题知,φ_{ij}是H的1次复表示,并且φ_{ij}提供的特征标χ_{ij}为:

$$\chi_{ij}\left(\begin{pmatrix}a_1&0\\b&a_2\end{pmatrix}\right)=\mu_i(a_1)\mu_j(a_2).$$

证明:(i) 当$i\neq j$ $(i,j=1,2,\cdots,q-1)$时,χ_{ij}^G是$q+1$次不可约特征标;(ii) χ_{ii}^G可约 $(i=1,2,\cdots,q-1)$.

(提示:(i) 据推论5.6.1,只要证:对于每一个$g\overline{\in}H$,$\chi_{ij}^g|H_g$与$\chi_{ij}|H_g$不相等.设$g=(b_{ij})$,选取适当的$y\in H_g$,使得$\chi_{ij}^g(y)\neq\chi_{ij}(y)$.(ii) 仍用推论5.6.1,只要证:对于某一个$g\overline{\in}H$,$\chi_{ii}^{(g)}|H_g=\chi_{ii}|H_g$.)

2. (Brauer)设G是有限群,把G的所有共轭类$C_1,C_2,\cdots,C_s$组成的集合记作$\boldsymbol{\Omega}$,设$\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_s$是$G$的所有不同的不可约复特征标.设有限群$A$在$\boldsymbol{\Omega}$上有一个作用,并且$A$在Irr($G$)上也有一个作用使得

$$(a\chi_i)(aC_j) = \chi_i(C_j), \quad \forall\, a \in A, 1 \leqslant i,j \leqslant s. \tag{4}$$

证明：(i) A 中每一个元素 a 在 Ω 中的不动点数目等于 a 在 $\mathrm{Irr}(G)$ 中的不动点数目；(ii) Ω 的 A-轨道条数等于 $\mathrm{Irr}(G)$ 的 A-轨道条数.

(**提示**：设 T 是 G 的复特征标表，则 T 是可逆矩阵. a 在 Ω 上的作用引起 T 的列的置换，相应的置换矩阵记作 Q；a 在 $\mathrm{Irr}(G)$ 上的作用引起 T 的行的置换，相应的置换矩阵记作 P. 公式(4)说明：$PTQ=T$. 从而 $T^{-1}PT=Q^{-1}$. a 在 $\mathrm{Irr}(G)$ 中的不动点数目等于 P 的迹.)

3. 设 G 是有限群，$N\lhd G$，把 N 的所有共轭类 $C_1,C_2,\cdots,C_t$ 组成的集合记作 Ω，任给 $g\in G$，规定 $gC_j := gC_jg^{-1}, j=1,2,\cdots,t$，这给出了 G 在 Ω 上的一个作用. 对于 $\mu_i\in \mathrm{Irr}(N)$，规定 $g\mu_i := \mu_i^g$，这给出了 G 在 $\mathrm{Irr}(N)$ 上的一个作用. 证明：(i) G 中每一个元素 g 在 Ω 中的不动点数目等于 g 在 $\mathrm{Irr}(N)$ 中的不动点数目；(ii) Ω 的 G-轨道条数等于 $\mathrm{Irr}(N)$ 的 G-轨道条数.

4. 设 G 是有限群，$N\lhd G$，Ω 是 N 的所有共轭类组成的集合. G 在 Ω 上的作用和 G 在 $\mathrm{Irr}(N)$ 上的作用同第 3 题. 证明下列三个条件等价：

(i) $G\backslash N$ 中每一个元素 g 在 Ω 中只固定一个点；

(ii) $G\backslash N$ 中每一个元素 g 在 $\mathrm{Irr}(N)$ 中只固定一个点；

(iii) 对于任意 $y\in N\backslash\{1\}$，有 $C_G(y)\subset N$.

(**提示**：(iii)$\Rightarrow$(i) 任取 $g\in G\backslash N$，假如 $C\neq\{1\}$ 是 g 的不动点，则 $gCg^{-1}=C$. 取 $x\in C$，于是 gxg^{-1} 与 x 在 N 中共轭.)

5. 设 G 是有限群，$N\lhd G$，如果对于每一个 $y\in N\backslash\{1\}$，有 $C_G(y)\subset N$，证明：

(i) 对于 N 的每一个不可约复特征标 $\mu\neq 1_N$，有 μ^G 不可约，并且 $N\not\subset \mathrm{Ker}(\mu^G)$；

(ii) 若 χ 是 G 的不可约复特征标，并且 $\mathrm{Ker}\chi\not\supset N$，则存在 N 的不可约复特征标 $\mu\neq 1_N$ 使得 $\chi=\mu^G$.

（**提示**：(i) 据第 4 题结论，对于每一个 $g\in G\backslash N$，有 $\mu^g\neq\mu$. 后半部分：假如 $N\subset\mathrm{Ker}(\mu^G)$，则对于每一个 $x\in N$ 有 $\mu^G(x)=\mu^G(1)$，记 $m=\mu^G(1)$，于是 $\mu^G|N=m1_N$. 据推论 5.6.3 推出 $\mu=1_N$，与已知矛盾. (ii) 因为 $\mathrm{Ker}\chi\not\supseteq N$，所以存在 $y_0\in N$ 使得 $\chi(y_0)\neq\chi(1)$，从而 $\chi|N\neq\chi(1)1_N$，因此 $\chi|N$ 包含 N 的一个不可约特征标 $\mu\neq1_N$，于是 $(\chi,\mu^G)_G=(\chi|N,\mu)>0$. 据第(i)小题，$\mu^G$ 不可约.）

§7 Clifford 定理，对于不可约复表示的次数的应用

上一节我们讨论了：有限群 G 的子群 H 的不可约特征标诱导到 G 上后，何时 μ^G 不可约？这一节我们来讨论与这相反的问题：G 的不可约特征标 χ 限制到正规子群 H 上具有什么性质？G 的不可约特征标能否由 G 的某个真子群的不可约特征标诱导出？

设 H 是有限群 G 的正规子群，K 是任一域，设 $\mu\in\mathrm{Irr}(H)$，在推论 3.1.1 已指出，对于任意 $g\in G$，μ 的共轭特征标 μ^g 也属于 $\mathrm{Irr}(H)$. 因此如果规定 $g\mu:=\mu^g$，则易验证这给出了 G 在 $\mathrm{Irr}(H)$ 上的一个作用，“点”μ 的稳定子群 G_μ 就是第一章 §2 中所说的 μ 在 G 中的惯性群 $I(\mu)$，显然 $H\subset I(\mu)$.

定理 5.7.1（Clifford 定理） 设 H 是有限群 G 的正规子群，K 是 G 的所有子群的分裂域且 $\mathrm{char}K=0$. 设 χ 是 G 的不可约特征标，设 μ 是 $\chi|H$ 的一个不可约成分，μ 在 $\chi|H$ 中的重数记作 m.

(i) 如果 $G_\mu\neq G$，则存在 G_μ 的一个不可约特征标 ν 使得 $\chi=\nu^G$；

(ii) 如果 $G_\mu=G$，则 $\chi|H=m\mu$.

证明 设 $\{g_1,g_2,\cdots,g_t\}$ 是 G_μ 在 G 中的左陪集代表系，设 $\{y_1,y_2,\cdots,y_l\}$ 是 H 在 G_μ 中的陪集代表系，则 H 在 G 中的陪集代表系是 $\{g_1y_1,\cdots,g_1y_l,\cdots,g_ty_1,\cdots,g_ty_l\}$. 据推论 5.6.3 得

$$\mu^G|H = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{l}\mu^{g_i y_j} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{l}(\mu^{y_j})^{g_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{l}\mu^{g_i} = l\sum_{i=1}^{t}\mu^{g_i}. \tag{1}$$

因为$\langle\mu^G,\chi\rangle_G=\langle\mu,\chi|H\rangle_H>0$，所以$\chi$是$\mu^G$的不可约成分. 于是$\chi|H$是$\mu^G|H$的成分，从(1)式知，$\chi|H$的不可约成分只可能有$\mu^{g_1},\mu^{g_2},\cdots,\mu^{g_t}$. 我们有

$$\langle\chi|H,\mu^{g_i}\rangle_H = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in H}\chi|H(h)\mu^{g_i}(h^{-1}) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in H}\chi(h)\mu(g_i^{-1}h^{-1}g_i)$$

$$= \frac{1}{|H|}\sum_{x\in H}\chi(g_ixg_i^{-1})\mu(x^{-1}) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in H}\chi(x)\mu(x^{-1})$$

$$= \langle\chi|H,\mu\rangle_H = m. \tag{2}$$

因此

$$\chi|H = m\sum_{i=1}^{t}\mu^{g_i}. \tag{3}$$

如果$G_\mu=G$，则$t=1$，由(3)式即得$\chi|H=m\mu$. 这就证明了(ii).

下面设$G_\mu\neq G$. 设$\mathrm{Irr}(G_\mu)=\{\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_s\}$，设

$$\chi|G_\mu = l_1\nu_1 + l_2\nu_2 + \cdots + l_s\nu_s,\quad l_i\geqslant 0. \tag{4}$$

于是得到$\chi|H=l_1\nu_1|H+l_2\nu_2|H+\cdots+l_s\nu_s|H$. 不妨设当$1\leqslant i\leqslant r$时，$\langle\nu_i|H,\mu\rangle_H>0$，而对于$r+1\leqslant j\leqslant s$有$\langle\nu_j|H,\mu\rangle_H=0$. 令

$$\nu = l_1\nu_1 + l_2\nu_2 + \cdots + l_r\nu_r. \tag{5}$$

因为$H\lhd G_\mu$，所以对于G_μ和$\nu_i(1\leqslant i\leqslant r)$应用上述证得的结论便得到

$$\nu_i|H = m_i\mu. \tag{6}$$

于是

$$\nu|H = \sum_{i=1}^{r}l_i\nu_i|H = \sum_{i=1}^{r}l_im_i\mu = m'\mu, \tag{7}$$

其中$m'=\sum_{i=1}^{r}l_im_i$. 因为

$$m=\langle\chi|H,\mu\rangle_H=\sum_{i=1}^{s}l_i\langle\nu_i|H,\mu\rangle_H=\sum_{i=1}^{r}l_im_i=m',$$

所以 $\nu|H=m\mu$. 现在来证 ν 不可约并且 $\nu^G=\chi$. 我们有

$$\langle\nu^G,\chi\rangle_G=\langle\nu,\chi|G_\mu\rangle_{G_\mu}=\left\langle\nu,\sum_{i=1}^{s}l_i\nu_i\right\rangle_{G_\mu}=\left\langle\nu,\nu+\sum_{j=r+1}^{s}l_j\nu_j\right\rangle_{G_\mu}$$

$$=\langle\nu,\nu\rangle_{G_\mu}+\left\langle\sum_{i=1}^{r}l_i\nu_i,\sum_{j=r+1}^{s}l_j\nu_j\right\rangle_{G_\mu}=\langle\nu,\nu\rangle_{G_\mu},$$

于是可设 $\nu^G=\langle\nu,\nu\rangle_{G_\mu}\chi+\eta$，其中 $\eta=0$ 或者 η 是 G 的特征标. 从而得

$$\nu^G(1)=\langle\nu,\nu\rangle_{G_\mu}\chi(1)+\eta(1)\geqslant\langle\nu,\nu\rangle_{G_\mu}\chi(1).\tag{8}$$

从(3)式得

$$\chi(1)=m\mu(1)[G:G_\mu].\tag{9}$$

因为 $\nu|H=m\mu$，所以 $\nu(1)=m\mu(1)$. 于是 $\chi(1)=\nu(1)[G:G_\mu]$. 因为 $\nu^G(1)=[G:G_\mu]\nu(1)$，所以从(8)式得

$$[G:G_\mu]\nu(1)\geqslant\langle\nu,\nu\rangle_{G_\mu}\nu(1)[G:G_\mu],\tag{10}$$

由此得出 $\langle\nu,\nu\rangle_{G_\nu}=1$. 所以 ν 不可约，并且(10)式和(8)式的等号成立，于是 $\eta(1)=0$，即得 $\eta=0$，从而 $\nu^G=\chi$. 这就证明了(i). ▌

Clifford 定理说明：设 K 是有限群 G 的所有子群的分裂域且 $\mathrm{char}K=0$，若 G 有非平凡正规子群 H，则 G 的不可约特征标 χ 或者可由 G 的真子群的不可约特征标诱导出，或者 χ 在 H 上的限制是 H 的某个不可约特征标的倍数. 下面的定理讨论了一类特殊情形：

定理 5.7.2(Blichfeldt) 设 K 是有限群 G 的所有子群的分裂域且 $\mathrm{char}K=0$. 设 H 是 G 的 abel 正规子群，且 $H\not\subset Z(G)$；设 χ 是 G 的忠实的不可约特征标，则 χ 能够由 G 的某个真子群的一个不可约特征标诱导出.

证明 设 μ 是 $\chi|H$ 的一个不可约成分，从定理 5.7.1 知道，只要证 $G_\mu\neq G$. 假如 $G_\mu=G$，则 $\chi|H=m\mu$. 因为 H 是 abel 群，所以 μ 的次数为 1. 设 χ 是 G 的表示(φ,V)提供的. 仍用 μ 作为提供特征标 μ 的 H 的表示的记号，则 $\varphi|H\approx\mu\oplus\cdots\oplus\mu$. 于是对每一个 h

$\in H$，有 $\varphi(h)=\mu(h)\cdot 1_V$，从而 $\varphi(h)\in Z(\mathrm{GL}(V))$. 由于 φ 是忠实的，因此 $h\in Z(G)$，于是 $H\subset Z(G)$. 矛盾. ▌

作为 Clifford 定理的一个应用，我们来证明有限群 G 的不可约复特征标的又一条性质，它是定理 4.5.1 的推广.

定理 5.7.3（Ito 定理） 设有限群 G 有一个正规子群 H，设 χ 是 G 的不可约复特征标，如果 $\chi|H$ 包含 H 的 1 次特征标，则 χ 的次数能整除 $[G:H]$.

证明 设 $\chi|H$ 包含 H 的 1 次特征标 μ.

情形 1 $G_\mu=G$. 此时有 $\chi|H=m\mu$. 设 χ 是 G 的表示 (φ,V) 提供的，则对于每一个 $h\in H$，有 $\varphi(h)=\mu(h)\cdot 1_V$. 从而 $|\chi(h)|=\chi(1)$. 这表明 $H\subset Z(\chi)$. 根据习题 4.5 的第 1 题知，$\chi(1)\mid[G:Z(\chi)]$. 因为 $[G:H]=[G:Z(\chi)][Z(\chi):H]$，所以

$$\chi(1)\mid[G:H].$$

情形 2 $G_\mu\neq G$. 此时存在 G_μ 的一个不可约复特征标 ν 使得 $\chi=\nu^G$，并且从定理 5.7.1 证明过程中知道，$\nu|H=m\mu$. 于是与情形 1 的证明方法类似可证得：$\nu(1)\mid[G_\mu:H]$. 因为 $\chi(1)=\nu^G(1)=[G:G_\mu]\nu(1)$，所以

$$[G:H]=[G:G_\mu][G_\mu:H]=[G:G_\mu]\nu(1)l=\chi(1)l. \quad ▌$$

推论 5.7.1 如果有限群 G 有一个 abel 正规子群 H，则 G 的每一个不可约复特征标的次数整除 $[G:H]$. ▌

习 题 5.7

1. 设 N 是有限群 G 的正规子群，K 是 G 的所有子群的分裂域且 $\mathrm{char}K=0$. 对于 $\chi\in\mathrm{Irr}(G)$，如果 $\langle\chi|N,\mu_0\rangle_N\neq0$，其中 μ_0 是 N 的主特征标，则 $N\subset\mathrm{Ker}\varphi$，其中 φ 提供 χ. 从而 $\bar\varphi$ 是 G/N 的不可约表示，其中 $\bar\varphi$ 的提升为 φ. 反之，如果 $\bar\varphi$ 是 G/N 的不可约表示，且 φ 是 $\bar\varphi$ 的提升，φ 提供的 G 的特征标为 χ，则 $\chi\in\mathrm{Irr}(G)$ 并且 $\langle\chi|N,\mu_0\rangle_N\neq0$.

（**提示**：原命题利用 Clifford 定理. 逆命题去证 $\chi|N=\chi(1)\mu_0$.）

§8 与一个 Abel 群的半直积的不可约表示

设有限群 G 是它的 abel 正规子群 A 与子群 H 的半直积(这时 G 的每一个元素可以唯一地写作乘积 ah 的形式,其中 $a\in A,h\in H$).我们来证明 G 的不可约表示可以由 A 的不可约表示和 H 的某些子群的不可约表示构造出来,这就是 Wigner 和 Mackey 的"小群"方法.

设 K 是 G 的所有子群的分裂域并且特征为 0.因为 A 是 abel 的,所以它的不可约表示均 1 次.因为 $A\lhd G$,故 G 在 $\mathrm{Irr}(A)$ 上有一个作用:$g\mu:=\mu^g,\forall g\in G,\mu\in\mathrm{Irr}(A)$.从而 H 在 $\mathrm{Irr}(A)$ 上有一个作用.设 $\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_r\}$ 是 $\mathrm{Irr}(A)$ 在 H 的作用下被划分成的轨道的代表系.令 H_i 是 μ_i 在 H 中的稳定子群,$G_i=A\cdot H_i$ 是 G 中相应的子群,$i=1,2,\cdots,r$.令

$$\widetilde{\mu}_i(ah)=\mu_i(a),\quad a\in A,\ h\in H_i. \tag{1}$$

因为

$$\begin{aligned}\widetilde{\mu}_i((a_1h_1)(a_2h_2))&=\widetilde{\mu}_i(a_1h_1a_2h_1^{-1}h_1h_2)=\mu_i(a_1(h_1a_2h_1^{-1}))\\&=\mu_i(a_1)\mu_i(h_1a_2h_1^{-1})=\mu_i(a_1)\mu_i^{h_1^{-1}}(a_2)\\&=\mu_i(a_1)\mu_i(a_2)=\widetilde{\mu}_i(a_1h_1)\widetilde{\mu}_i(a_2h_2),\end{aligned}$$

所以 $\widetilde{\mu}_i$ 是 G_i 到 K^* 的同态,从而 $\widetilde{\mu}_i$ 是 G_i 的 1 次 K-表示.

设(ψ,W)是 H_i 的一个不可约表示.因为

$$G_i/A=A\cdot H_i/A\cong H_i/A\cap H_i\cong H_i,$$

所以 ψ 与 G_i/A 到 H_i 上的同构的合成给出了 G_i/A 的一个不可约表示,把它提升便得到 G_i 的一个不可约表示$(\widetilde{\psi},W)$.于是

$$\widetilde{\psi}(ah)=\psi(h),\quad a\in A,h\in H_i. \tag{2}$$

作 $\widetilde{\mu}_i$ 与 $\widetilde{\psi}$ 的张量积,便得到 G_i 的一个不可约 K-表示 $\widetilde{\mu}_i\otimes\widetilde{\psi}$.把它诱导到 G 上,便得到 G 的一个表示,记作 $\theta_{i,\psi}$.设 ψ 提供的特征标是 τ,$\widetilde{\psi}$ 提供的特征标记作 $\widetilde{\tau}$,则 $\theta_{i,\psi}$提供的特征标是$(\widetilde{\mu}_i\widetilde{\tau})^G$.

定理 5.8.1 条件和记号如上述，有下述结论：

(i) $\theta_{i,\psi}$是不可约的；

(ii) 若 $\theta_{i,\psi}\approx\theta_{i',\psi'}$，则 $i=i'$，并且 $\psi\approx\psi'$；

(iii) G 的每一个不可约表示都与某一个 $\theta_{i,\psi}$等价.

从而由 A 的不可约表示 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_r$ 与 $H_i(1\leqslant i\leqslant r)$的一切不可约表示可构造出 G 的一切不可约表示.

证明 (i) 我们要利用 Mackey 的诱导特征标不可约性的判定定理. 设 $x\overline{\in}G_i$，令$(G_i)_x=G_i\cap xG_ix^{-1}$. 考虑$(G_i)_x$的两个特征标 $\widetilde{\mu_i}\bar{\tau}|(G_i)_x$ 和$(\widetilde{\mu_i}\bar{\tau})^x|(G_i)_x$. 显然 $A\subset(G_i)_x$. 任意 $a\in A$，

$$\widetilde{\mu_i}\bar{\tau}(a)=\widetilde{\mu_i}(a)\bar{\tau}(a)=\widetilde{\mu_i}(a)\tau(1),$$
$$(\widetilde{\mu_i}\bar{\tau})^x(a)=(\widetilde{\mu_i}\bar{\tau})(x^{-1}ax)=\widetilde{\mu_i}(x^{-1}ax)\bar{\tau}(x^{-1}ax)$$
$$=\mu_i(x^{-1}ax)\tau(1)=\mu_i^x(a)\tau(1).$$

因为 $x\overline{\in}G_i$，所以 $\mu_i^x\neq\mu_i$. 假如 $\widetilde{\mu_i}\bar{\tau}|(G_i)_x$ 与$(\widetilde{\mu_i},\bar{\tau})^x|(G_i)_x$ 有公共的不可约成分 ν，则由上述知：$\nu(a)=m\mu_i(a)$且有 $\nu(a)=n\mu_i^x(a)$，其中 $0<m,n\leqslant\tau(1)$. 于是 $m\mu_i=n\mu_i^x$. 从而得$\langle m\mu_i,m\mu_i\rangle_A=\langle n\mu_i^x,n\mu_i^x\rangle_A$，由此得出 $m=n$. 因此 $\mu_i=\mu_i^x$，矛盾. 这就证明了 $\theta_{i,\psi}$不可约.

*(ii) $\theta_{i,\psi}\approx\theta_{i',\psi'}$当且仅当$(\widetilde{\mu_i}\bar{\tau})^G=(\widetilde{\mu_{i'}},\bar{\tau'})^G$. 考虑它们在 A 上的限制，为此需利用 Mackey 的子群定理，定理中的 L 现在是 A，定理中的 H 现在是 G_i(或 $G_{i'}$)，设$\{g_1,g_2,\cdots,g_t\}$是(A,G_i)在 G 里的双陪集代表系，设 $g_j=a_jh_j$，其中 $a_j\in A,h_j\in H$，则

$$G=\bigcup_{j=1}^{t}Ag_jG_i=\bigcup_{j=1}^{t}Aa_jh_jG_i=\bigcup_{j=1}^{t}Ah_jG_i=\bigcup_{j=1}^{t}h_jAG_i=\bigcup_{j=1}^{t}h_jG_i.$$

于是$\{h_1,h_2,\cdots,h_t\}$是 G_i 在 G 中的左陪集代表系. 因为

$$AH=G=\bigcup_{j=1}^{t}h_jAH_i=\bigcup_{j=1}^{t}Ah_jH_i=A\bigcup_{j=1}^{t}h_jH_i,$$

所以 $H=\bigcup_{j=1}^{t}h_jH_i$，这说明$\{h_1,h_2,\cdots,h_t\}$是 H_i 在 H 中的左陪集代表系. 任意 $h\in H$，设 $h=h_ly$，其中 $y\in H_i$，则 $\mu_i^h=\mu_i^{(h_ly)}=(\mu_i^y)^{h_l}=\mu_i^{h_l}$. 所以$\{\mu_i^{h_1},\mu_i^{h_2},\cdots,\mu_i^{h_t}\}$是 μ_i 的 H-轨道. Mackey 的子群定理中

的 L，现在是 $A\cap g_jG_ig_j^{-1}=A$，因此得到

$$(\widetilde{\mu_i}\tilde{\tau})^G|A=\sum_{j=1}^{t}(\widetilde{\mu_i}\tilde{\tau})^{g_j}|A. \tag{3}$$

因为

$$\begin{aligned}(\widetilde{\mu_i}\tilde{\tau})^{g_j}(a)&=\widetilde{\mu_i}\tilde{\tau}(g_j^{-1}ag_j)=\widetilde{\mu_i}(g_j^{-1}ag_j)\tilde{\tau}(g_j^{-1}ag_j)\\&=\mu_i(g_j^{-1}ag_j)\tilde{\tau}(1)=\tilde{\tau}(1)\mu_i(h_j^{-1}a_j^{-1}aa_jh_j)\\&=\tilde{\tau}(1)\mu_i^{h_j}(a_j^{-1}aa_j)=\tilde{\tau}(1)\mu_i^{h_j}(a),\end{aligned}$$

所以 $(\widetilde{\mu_i}\tilde{\tau})^{g_j}|A=\tilde{\tau}(1)\mu_i^{h_j}$. 于是(3)式变成

$$(\widetilde{\mu_i}\tilde{\tau})^G|A=\tilde{\tau}(1)\sum_{j=1}^{t}\mu_i^{h_j}. \tag{4}$$

同理

$$(\widetilde{\mu_{i'}}\tilde{\tau}')^G|A=\tilde{\tau}'(1)\sum_{j=1}^{t'}\mu_{i'}^{h_j'}. \tag{5}$$

如果 $\theta_{i,\psi}\approx\theta_{i',\psi'}$，则得到 $\tilde{\tau}(1)\sum\limits_{j=1}^{t}\mu_i^{h_j}=\tilde{\tau}'(1)\sum\limits_{j=1}^{t'}\mu_{i'}^{h_j'}$. 假如 $i'\neq i$，则 μ_i 的 H-轨道与 $\mu_{i'}$ 的 H-轨道的交是空集，于是得到

$$\left\langle\tilde{\tau}(1)\sum_{j=1}^{t}\mu_i^{h_j},\tilde{\tau}'(1)\sum_{j=1}^{t'}\mu_{i'}^{h_j'}\right\rangle_A=0,$$

这与 $\tilde{\tau}(1)\sum\limits_{j=1}^{t}\mu_i^{h_j}=\tilde{\tau}'(1)\sum\limits_{j=1}^{t'}\mu_{i'}^{h_j'}$ 矛盾. 所以 $i'=i$. 进而得出 $\tilde{\tau}(1)=\tilde{\tau}'(1)$，并且 $\tilde{\tau}$ 和 $\tilde{\tau}'$ 都是 G_i 的不可约特征标，而 τ 和 τ' 都是 H_i 的不可约特征标，即 (ψ,W) 和 (ψ',W') 都是 H_i 的不可约表示，下面来证 $\psi\approx\psi'$，为此只要证 W 与 W' 作为左 $K[H_i]$-模是模同构的.

设 A 的 1 次表示 μ_i 的表示空间为 $\langle\varepsilon\rangle$，则 G_i 的表示 $\widetilde{\mu_i}\otimes\tilde{\psi}$ 的表示空间是 $\langle\varepsilon\rangle\otimes_K W$，从而 G 的表示 $\theta_{i,\psi}$ 的表示空间

$$V=K[G]\otimes_{K[G_i]}(\langle\varepsilon\rangle\otimes_K W).$$

考虑 V 的子集

$$V_i:=\{\alpha\in V\mid\theta_{i,\psi}(a)\alpha=\mu_i(a)\alpha,\quad\forall\ a\in A\},$$

显然 V_i 是 V 的子空间. 任意 $h\in H_i,\alpha\in V_i,a\in A$，我们有

$$\begin{aligned}\theta_{i,\varphi}(a)(h\alpha) &= \theta_{i,\varphi}(a)\theta_{i,\varphi}(h)\alpha = \theta_{i,\varphi}(ah)\alpha = \theta_{i,\varphi}(hh^{-1}ah)\alpha \\ &= \theta_{i,\varphi}(h)\theta_{i,\varphi}(h^{-1}ah)\alpha = \theta_{i,\varphi}(h)\mu_i(h^{-1}ah)\alpha \\ &= h\widetilde{\mu}_i(h^{-1}ah)\alpha = \widetilde{\mu}_i(h^{-1}\cdot 1\cdot ah)h\alpha \\ &= \widetilde{\mu}_i(h^{-1}1)\widetilde{\mu}_i(ah)h\alpha = \mu_i(1)\mu_i(a)h\alpha = \mu_i(a)h\alpha,\end{aligned}$$

这说明 $h\alpha\in V_i$，因此 V_i 是 H_i-不变子空间，从而 V_i 是 $K[H_i]$-模. 我们来证 V_i 与 W 是左 $K[H_i]$-模同构. 为此我们先来求 V_i 的一个 K-基. 前面已指出 $\{h_1,h_2,\cdots,h_t\}$ 是 G_i 在 G 中的左陪集代表系，设 W 的一个 K-基为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$，则 V 的一个 K-基是：

$$\{h_j\otimes(\varepsilon\otimes\beta_l)\mid 1\leqslant j\leqslant t,1\leqslant l\leqslant m\}.$$

设 $\alpha=\sum_{j=1}^{t}\sum_{l=1}^{m}k_{jl}[h_j\otimes(\varepsilon\otimes\beta_l)]$，则 $\alpha\in V_i$ 当且仅当对一切 $a\in A$，有

$$\theta_{i,\varphi}(a)\sum_j\sum_l k_{jl}[h_j\otimes(\varepsilon\otimes\beta_l)]=\mu_i(a)\sum_j\sum_l k_{jl}[h_j\otimes(\varepsilon\otimes\beta_l)].$$

上式左端等于

$$\begin{aligned}\sum_j\sum_l k_{jl}[ah_j\otimes(\varepsilon\otimes\beta_l)] &= \sum_j\sum_l k_{jl}[h_jh_j^{-1}ah_j\otimes(\varepsilon\otimes\beta_l)] \\ &= \sum_j\sum_l k_{jl}[h_j\otimes h_j^{-1}ah_j(\varepsilon\otimes\beta_l)] \\ &= \sum_j\sum_l k_{jl}\{h_j\otimes[\widetilde{\mu}_i(h_j^{-1}ah_j)\varepsilon\otimes\widetilde{\psi}(h_j^{-1}ah_j)\beta_l]\} \\ &= \sum_j\sum_l k_{jl}\{h_j\otimes[\mu_i(h_j^{-1}ah_j)\varepsilon\otimes\psi(1)\beta_l]\} \\ &= \sum_j\sum_l k_{jl}\{h_j\otimes[\mu_i^{h_j}(a)\varepsilon\otimes\beta_l]\} \\ &= \sum_j\sum_l k_{jl}\mu_i^{h_j}(a)[h_j\otimes(\varepsilon\otimes\beta_l)] \\ &= \sum_j\mu_i^{h_j}(a)\sum_l k_{jl}[h_j\otimes(\varepsilon\otimes\beta_l)].\end{aligned}$$

从而得到

$$\sum_j\sum_l\mu_i^{h_j}(a)k_{jl}[h_j\otimes(\varepsilon\otimes\beta_l)]=\sum_j\sum_l\mu_i(a)k_{jl}[h_j\otimes(\varepsilon\otimes\beta_l)].$$

由于 $\{h_j\otimes(\varepsilon\otimes\beta_l)\mid 1\leqslant j\leqslant t,\ 1\leqslant l\leqslant m\}$ 是 V 的一个基，因此，从上

式得出 $\mu_i^{h_j}(a)k_{jl}=\mu_i(a)k_{jl}$，从而得到 $(\mu_i^{h_j}-\mu_i)(a)k_{jl}=0$. 当 $h_j\neq 1$ 时，$\mu_i^{h_j}\neq\mu_i$，从而 $k_{jl}=0$. 因此 $\alpha\in V_i$ 当且仅当

$$\alpha=\sum_{l=1}^{m}k_l[1\otimes(\varepsilon\otimes\beta_l)].$$

这说明 $\{1\otimes(\varepsilon\otimes\beta_l)\mid l=1,2,\cdots,m\}$ 是 V_i 的一个 K-基. 所以 V_i 与 W 有一个向量空间的同构 σ：$1\otimes(\varepsilon\otimes\beta_l)\mapsto\beta_l$. 对于任意 $h\in H_i$，有

$$\begin{aligned}\sigma\Big\{h\Big[\sum_{l=1}^{m}k_l(1\otimes(\varepsilon\otimes\beta_l))\Big]\Big\}&=\sigma\Big\{\sum_{l}k_l[h\otimes(\varepsilon\otimes\beta_l)]\Big\}\\&=\sigma\Big\{\sum_{l}k_l[1\otimes h(\varepsilon\otimes\beta_l)]\Big\}\\&=\sigma\Big\{\sum_{l}k_l[1\otimes(\widetilde{\mu}_i(h)\varepsilon\otimes\widetilde{\psi}_i(h)\beta_l)]\Big\}\\&=\sigma\Big\{\sum_{l}k_l[1\otimes(\mu_i(1)\varepsilon\otimes\psi_i(h)\beta_l)]\Big\}\\&=\sigma\Big\{\sum_{l}k_l[1\otimes(\varepsilon\otimes\psi_i(h)\beta_l)]\Big\}\\&=\sum_{l}k_l\psi_i(h)\beta_l=h\Big\{\sigma\Big[\sum_{l}k_l(1\otimes(\varepsilon\otimes\beta_l))\Big]\Big\}.\end{aligned}$$

由此得出：σ 是 $K[H_i]$-模同构，因此 V_i 与 W 是 $K[H_i]$-模同构.

同样，设 W' 的一个 K-基为 $\beta_1',\beta_2',\cdots,\beta_m'$，则 $V'=K[G]\otimes_{K[G_i]}(\langle\varepsilon\rangle\times W')$ 的一个 K-基为 $\{h_j\otimes(\varepsilon\otimes\beta_l')\mid 1\leqslant j\leqslant t,1\leqslant l\leqslant m\}$. 令

$$V_i' :=\{\alpha'\in V'\mid\theta_{i,\psi'}(a)\alpha'=\mu_i(a)\alpha',\forall\, a\in A\},$$

则 V_i' 是 V' 的子空间，并且是 $K[H_i]$-模. V_i' 的一个 K-基为：

$$\{1\otimes(\varepsilon\otimes\beta_l')\mid l=1,2,\cdots,m\}.$$

并且 V_i' 与 W' 是 $K[H_i]$-模同构. 因为 $\theta_{i,\psi}$ 与 $\theta_{i,\psi'}$ 等价，所以 V 与 V' 是左 $K[G]$-模同构，即存在模同构映射 τ. 设 $\alpha\in V_i$，则对一切 $a\in A$，有

$$\begin{aligned}\theta_{i,\psi'}(a)(\tau\alpha)&=a(\tau\alpha)=\tau(a\alpha)=\tau(\theta_{i,\psi}(a)\alpha)\\&=\tau(\mu_i(a)\alpha)=\mu_i(a)(\tau\alpha),\end{aligned}$$

这说明 $\tau\alpha\in V_i'$. 因此 τ 是向量空间 V_i 和 V_i' 的同构. 由于对于任

意 $h\in H_i\subset G$，有 $\tau(h\alpha)=h(\tau\alpha)$，$\forall\ \alpha\in V_i$，所以 τ 是左 $K[H_i]$-模 V_i 和 V_i' 的模同构. 综上述得 W 与 W' 是模同构.

*(iii) 任取 G 的一个不可约 K-表示 (φ,V). 设 A 的不可约表示 μ 在 $\varphi|A$ 中出现，μ 的表示空间设为 $\langle\varepsilon\rangle$. 把 $K[A]$-模 V 的直和分解式中出现的与 $\langle\varepsilon\rangle$ 同构的不可约子模的直和记作 U，设 $U=\langle\varepsilon\rangle\oplus\langle\varepsilon_2\rangle\oplus\cdots\oplus\langle\varepsilon_m\rangle$. 设 λ_l 是 $\langle\varepsilon\rangle$ 到 $\langle\varepsilon_l\rangle$ 的模同构，则对于任意 $a\in A$，有 $\lambda_l(a\varepsilon)=a\lambda_l(\varepsilon)$. 因为

$$\lambda_l(a\varepsilon)=\lambda_l(\varphi(a)\varepsilon)=\lambda_l(\mu(a)\varepsilon)=\mu(a)\lambda_l(\varepsilon)=\mu(a)\varepsilon_l,$$

所以 $a\varepsilon_l=\mu(a)\varepsilon_l$. 于是若 $\alpha\in U$，则 $a\alpha=\mu(a)\alpha$，$\forall\ a\in A$；反之亦然（利用 $K[A]$-模 V 的直和分解式）. μ 在 H 中的稳定子群记作 H_μ. 任意 $h\in H_\mu$，任意 $a\in A$，有 $a(h\varepsilon)=h(h^{-1}ah)\varepsilon=h\mu(h^{-1}ah)\varepsilon=h\mu^h(a)\varepsilon=h\mu(a)\varepsilon=\mu(a)(h\varepsilon)$，所以 $h\varepsilon\in U$. 考虑由集合 $\{h\varepsilon\mid h\in H_\mu\}$ 生成的 U 的子空间，显然它是左 $K[H_\mu]$-模，取它的一个不可约子模 W_0，由 W_0 提供的 H_μ 的表示记作 ψ_0. 由 (ψ_0,W_0) 可得到 $G_\mu=AH_\mu$ 的 K-表示 $(\tilde{\psi}_0,W_0)$. 由 A 的表示 $(\mu,\langle\varepsilon\rangle)$ 可得到 G_μ 的表示 $(\tilde{\mu},\langle\varepsilon\rangle)$. 作张量积 $(\tilde{\mu}\otimes\tilde{\psi}_0,\langle\varepsilon\rangle\otimes_K W_0)$ 仍得到 G_μ 的表示，并且它是不可约的. 映射 f：$\varepsilon\otimes\beta_l\mapsto\beta_l$ 是向量空间 $\langle\varepsilon\rangle\otimes_K W_0$ 到 W_0 的同构，其中 $\beta_l(1\leqslant l\leqslant b)$ 是 W_0 的一个 K-基. 因为对于 $a\in A$，$h\in H_\mu$，有 $a(h\varepsilon)=\mu(a)(h\varepsilon)$，所以对于 W_0 中每一个向量 α 有 $a\alpha=\mu(a)\alpha$，从而 W_0 是 $K[G_\mu]$-模，并且显然是不可约的. 对任意 $ah\in G_\mu$，有

$$\begin{aligned}f[ah\ (\varepsilon\otimes\beta_l)]&=f(a\varepsilon\otimes h\beta_l)=f(\mu(a)\varepsilon\otimes h\beta_l)\\&=\mu(a)f(\varepsilon\otimes h\beta_l)=\mu(a)h\beta_l\\&=ah\beta_l=ah[f(\varepsilon\otimes\beta_l)],\end{aligned}$$

所以 f 是 $K[G_\mu]$-模同构. 由于 $K[G_\mu]$-模 $\langle\varepsilon\rangle\otimes_K W_0$ 提供的 G_μ 的表示是 $\tilde{\mu}\otimes\tilde{\psi}_0$，而 $K[G_\mu]$-模 W_0 提供的 G_μ 的表示是 $\varphi|G_\mu$ 的一个不可约分量，因此 G_μ 的不可约表示 $\tilde{\mu}\otimes\tilde{\psi}_0$ 在 $\varphi|G_\mu$ 中出现，据 Frobenius 互反律，G 的不可约表示 φ 在 $(\tilde{\mu}\otimes\psi_0)^G$ 中出现. 由于 μ 可以作为 $\mathrm{Irr}(A)$ 的 H-轨道代表系中的一个元素，譬如可取 μ_i 为

μ，于是 H_μ 成为 H_i，ψ_0 便是 H_i 的一个不可约表示 ψ，于是 $(\widetilde{\mu}\otimes\widetilde{\psi}_0)^G$ 就是 $\theta_{i,\psi}$，据(i)知，$\theta_{i,\psi}$ 不可约，于是 $\varphi\approx\theta_{i,\psi}$. ▌

例 5.8.1 设 G 是 7 阶子群 $A=\langle a\rangle$ 与 3 阶子群 $H=\langle b\rangle$ 的半直积，满足关系：$bab^{-1}=a^2$. 求 G 的复特征标表.

解 A 是 G 的 abel 正规子群，A 的所有不同的不可约复特征标为 $\mu_i(i=0,1,\cdots,6)$，其中 $\mu_i(a)=\varepsilon^i$，这里 ε 是本原 7 次单位根. 因为

$$\mu_i^b(a)=\mu_i(b^{-1}ab)=\mu_i(a^4)=\varepsilon^{4i},\quad 0\leqslant i\leqslant 6,$$

所以 $\mathrm{Irr}(A)$ 的 H-轨道有：$\{\mu_0\}$，$\{\mu_1,\mu_4,\mu_2\}$，$\{\mu_3,\mu_5,\mu_6\}$. 于是 $\mathrm{Irr}(A)$ 的 H-轨道代表系为 $\{\mu_0,\mu_1,\mu_3\}$. 相应的稳定子群分别为 $H_0=H$，$H_1=\{1\}$，$H_2=\{1\}$. H_0 的不可约复表示有 3 个：$\psi_0(b)=1$，$\psi_1(b)=\omega$，$\psi_2(b)=\omega^2$，其中 $\omega=\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$. 我们有

$$(\widetilde{\mu}_0\widetilde{\psi}_0)(a^ib^j)=\widetilde{\mu}_0(a^ib^j)\widetilde{\psi}_0(a^ib^j)=\mu_0(a^i)\psi_0(b^j)=1,$$

$$(\widetilde{\mu}_0\widetilde{\psi}_1)(a^ib^j)=\mu_0(a^i)\psi_1(b^j)=\omega^j,$$

$$(\widetilde{\mu}_0\widetilde{\psi}_2)(a^ib^j)=\mu_0(a^i)\psi_2(b^j)=\omega^{2j}.$$

因为 $G_0=AH_0=AH=G$，所以 $\widetilde{\mu}_0\widetilde{\psi}_i(i=0,1,2)$ 是 G 的不可约复特征标，它们都是 1 次的，分别记为 χ_1,χ_2,χ_3.

$G_1=AH_1=A\{1\}$. $\{1\}$ 的不可约表示只有一个：主表示. 于是 $\theta_{1,\psi}$ 提供的 G 的特征标 $\chi_4=\mu_1^G$. 我们有 $\chi_4(b^j)=\mu_1^G(b^j)=0(j=1,2)$；

$$\chi_4(a^i)=\mu_1^G(a^i)=\mu_1(a^i)+\mu_1(b^{-1}a^ib)+\mu_1(b^{-2}a^ib^2)$$
$$=\varepsilon^i+\varepsilon^{4i}+\varepsilon^{2i}.$$

$G_2=AH_2=A\{1\}$. 于是 $\theta_{3,\psi}$ 提供的 G 的特征标 $\chi_5=\mu_3^G$. 我们有

$$\mu_3^G(b^j)=0(j=1,2);\quad \mu_3^G(a^i)=\varepsilon^{3i}+\varepsilon^{5i}+\varepsilon^{6i},\quad 0\leqslant i\leqslant 6.$$

我们已经求出了 G 的 5 个不可约复特征标，其中 χ_4,χ_5 均是 3 次的. 由于 $1^2+1^2+1^2+3^2+3^2=21=|G|$，所以 G 没有别的不可约复特征标了. 从而 G 有 5 个共轭类，它们是：$\{1\}$，$\{a,a^2,a^4\}$，$\{a^3,a^6,a^5\}$，$\{a^ib\,|\,0\leqslant i\leqslant 6\}$，$\{a^ib^2\,|\,0\leqslant i\leqslant 6\}$. 现在可以写出 G 的复

特征标表如下：

	1	a	a^3	b	b^2
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	ω	ω^2
χ_3	1	1	1	ω^2	ω
χ_4	3	$\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^4$	$\varepsilon^3+\varepsilon^5+\varepsilon^6$	0	0
χ_5	3	$\varepsilon^3+\varepsilon^5+\varepsilon^6$	$\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^4$	0	0

习　题　5.8

1. 写出例 5.8.1 中 21 阶群 G 的两个 3 次不可约复矩阵表示.

2. 利用定理 5.8.1 计算二面体群 D_{2m}, D_{2m+1} 的复特征标表；计算 S_4, A_4 的复特征标表.

3. 给出定理 5.8.1 的(iii)的另一证法.

(**提示**：去计算所构造出的所有 $\theta_{i,\varphi}$ 的次数的平方和，若等于 $|G|$，则 G 没有别的与上述 $\theta_{i,\varphi}$ 不等价的不可约 K-表示. 给定 i，H_i 的不可约 K-表示的次数的平方和等于 $|H_i|$，从而 $\theta_{i,\varphi}$ 的次数的平方和为 $[G:G_i]^2|H_i|=[H:H_i]^2|H_i|=\frac{|H|^2}{|H_i|}$，这里 $[G:G_i]$ 与 $[H:H_i]$ 相等的理由可直接计算得到或者从定理 5.8.1 的(ii)的证明中可以看到. 因为 $|\mathrm{Irr}(A)|=|A|$，所以 $|A|=|\mathrm{Irr}(A)|=\sum_i|\mu_i^H|=\sum_i\frac{|H|}{|H_i|}$，其中 $|\mu_i^H|$ 表示 μ_i 的 H-轨道的长度. 因此所构造出的所有 $\theta_{i,\varphi}$ 的次数的平方和等于 $\sum_i\frac{|H|^2}{|H_i|}=|H|\cdot|A|=|G|$.)

*§9　单项表示，M-群

Clifford 定理说明：设 K 是有限群 G 的所有子群的分裂域且

$\mathrm{char}K=0$,若 G 有非平凡正规子群 H,则 G 的不可约特征标 χ 或者能够由 G 的某个真子群的一个不可约特征标诱导出,或者 χ 在 H 上的限制是 H 的某个不可约特征标的倍数. 本节进一步讨论:在什么条件下,G 的不可约特征标可以由它的子群的 1 次特征标诱导出? 本章 §1 曾指出:若群 G 的表示 φ 是 G 的某个子群的 1 次表示的诱导表示,则称 φ 是单项表示,它提供的矩阵表示 Φ 使得每个 $\Phi(g)$ 都是单项矩阵.

定义 1 设 K 是群 G 的所有子群的分裂域,如果 G 的每一个不可约 K-表示都是单项表示,则称 G 是**关于域 K 的 M-群**. 若 G 是关于复数域 C 的 M-群,则简称 G 为 M-群.

定理 5.9.1 设有限群 G 是关于域 K 的 M-群,则 G 的任一商群 $\overline{G}=G/N$ 也是关于域 K 的 M-群.

证明 设 G 的所有不等价的不可约 K-表示是 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_t$,其中 $\mathrm{Ker}\varphi_i\supset N$ $(i=1,2,\cdots,t)$. 设 $\varphi_i(1\leqslant i\leqslant t)$ 是商群 G/N 的表示 $\tilde{\varphi}_i$ 的提升,则 $\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_2,\cdots,\tilde{\varphi}_t$ 是 G/N 的全部不等价的不可约 K-表示(据命题 3.4.6).

先证 K 是 G/N 的分裂域(即,群的分裂域是商群继承的). 任取 K 的一个扩域 F,因为 K 是 G 的分裂域,所以 φ_i^F 仍不可约. 显然 $\mathrm{Ker}\varphi_i^F=\mathrm{Ker}\varphi_i$,于是对于 $1\leqslant i\leqslant t$,有 $\mathrm{Ker}\varphi_i^F\supset N$,从而可设 φ_i^F 是由 G/N 的 F-表示 $(\tilde{\varphi}_i^F)$ 提升得到的,因此 $(\tilde{\varphi}_i^F)$ 也不可约. 因为 $\Phi_i^F(g)$ 与 $\Phi_i(g)$ 在写法上一致,$\tilde{\Phi}_i^F(gN)$ 与 $\tilde{\Phi}_i(gN)$ 在写法上一致,并且 $\tilde{\Phi}_i(gN)=\Phi_i(g)$,所以 $\tilde{\Phi}_i^F(gN)=\Phi_i^F(g)=\tilde{\Phi}_i^F(gN)$,$\forall\, gN\in G/N$. 由此得 $\tilde{\Phi}_i^F=(\tilde{\Phi}_i^F)$,从而 $\tilde{\varphi}_i^F$ 不可约$(1\leqslant i\leqslant t)$. 因此 K 是 G/N 的分裂域.

任取 G/N 的一个子群 H/N. 由于 K 是 H 的分裂域,据上一段所证的结果知:K 是 H/N 的分裂域.

对于每一个 $i(1\leqslant i\leqslant t)$,因为 φ_i 是单项表示,所以存在 G 的某个子群 H_i 的 1 次表示 ψ_i 使得 $\varphi_i=\psi_i^G$. 设 H_i 在 G 中的左陪集代表系是 $\{g_1=1,g_2,\cdots,g_l\}$. 任取 $g\in\mathrm{Ker}\varphi_i$,则 $\Phi_i(g)=I$,其中 I 是单

位矩阵. 由于 $\Phi_i(g)=\Psi_i^G(g)$，因此得到 $\Psi_i(g_1^{-1}gg_1)=1$，即 $\Psi_i(g)=1$，从而 $g\in H_i$. 所以 $H_i\supset \mathrm{Ker}\varphi_i\supset N$. 任取 $n\in N$，同上理，由于 $\Phi_i(n)=I$ 可推出 $\Psi_i(n)=1$，由此得 $n\in\mathrm{Ker}\psi_i$. 因此 $N\subset\mathrm{Ker}\psi_i$. 于是可设 ψ_i 是 H_i/N 的表示 $\widetilde{\psi}_i$ 的提升，$\widetilde{\psi}_i$ 也是 1 次的. 容易看出，H_i/N 在 G/N 中的左陪集代表系是 $\{g_1N, g_2N, \cdots, g_tN\}$. 于是对于任意 $gN\in G/N$，$(\widetilde{\Psi}_i)^G(gN)$ 的 (k,j) 元为

$$\dot{\widetilde{\Psi}}_i[(g_kN)^{-1}(gN)(g_jN)]=\dot{\widetilde{\Psi}}_i(g_k^{-1}gg_jN),$$

当 $g_k^{-1}gg_j\in H_i$ 时，

$$\dot{\widetilde{\Psi}}_i(g_k^{-1}gg_jN)=\widetilde{\Psi}_i(g_k^{-1}gg_jN)=\Psi_i(g_k^{-1}gg_j);$$

当 $g_k^{-1}gg_j\in H_i$ 时，有

$$\dot{\widetilde{\Psi}}_i(g_k^{-1}gg_jN)=0.$$

另一方面，$\widetilde{\Phi}_i(gN)=\Phi_i(g)=\Psi_i^G(g)$，因此 $\widetilde{\Phi}_i(gN)$ 的 (k,j) 元为 $\Psi_i(g_k^{-1}gg_j)$. 所以 $\widetilde{\Phi}_i=(\widetilde{\Psi}_i)^G$，即，$\widetilde{\varphi}_i$ 是单项表示. 因此 G/N 是关于域 K 的 M-群. ▌

定理 5.9.1 说明：对于有限群来说，M-群这一性质是商群继承的.

下面我们来讨论哪些有限群是 M-群？先介绍群论中的几个概念和性质，下面均讨论有限群.

定义 2 群 G 称为**超可解的**，如果存在 G 的一个子群序列

$$\{1\}=G_0\subset G_1\subset\cdots\subset G_n=G, \tag{1}$$

其中 $G_i\lhd G$，并且 G_{i-1}/G_i 是循环群，$0\leqslant i\leqslant n$.

命题 5.9.1 超可解群的每一个子群和每一个商群都是超可解的.

证明 设 G 是超可解群，则 G 有子群列(1)，其中 $G_i\lhd G$，并且 G_{i+1}/G_i 是循环群，$0\leqslant i\leqslant n$.

任取 G 的一个子群 H，令 $H_i=H\cap G_i(0\leqslant i\leqslant n)$. 显然有

$$\{1\}=H_0\subset H_1\subset\cdots\subset H_n=H.$$

因为 $G_i\lhd G$，所以 $H_i\lhd H$ $(0\leqslant i\leqslant n)$. 对于每一个 $i(0\leqslant i<n)$，令

$$f: H_{i+1} \to G_{i+1}/G_i$$
$$h \mapsto hG_i,$$

显然 f 是群同态，并且

$h \in \mathrm{Ker} f \Longleftrightarrow h \in H_{i+1}$ 并且 $hG_i = G_i \Leftrightarrow h \in H_{i+1} \cap G_i = H_i$，因此 $\mathrm{Ker} f = H_i$，从而 $H_{i+1}/H_i \cong \mathrm{Im} f$. 由于 $\mathrm{Im} f < G_{i+1}/G_i$，并且 G_{i+1}/G_i 是循环群，所以 H_{i+1}/H_i 是循环群. 从而 H 是超可解的.

任取 G 的一个商群 $\overline{G}=G/N$，令 $\overline{G}_i=G_iN/N$，$0\leqslant i\leqslant n$. 于是有

$$\{\overline{1}\} = \overline{G}_0 \subset \overline{G}_1 \subset \cdots \subset \overline{G}_n = \overline{G},$$

因为 $G_i \lhd G$，所以 $\overline{G}_i \lhd \overline{G}$. 对于每一个 $i(0\leqslant i<n)$，有

$$\begin{aligned}\overline{G}_{i+1}/\overline{G}_i &= (G_{i+1}N/N)/(G_iN/N) \cong (G_{i+1}N)/(G_iN) \\ &= (G_{i+1}(G_iN))/(G_iN) \cong G_{i-1}/(G_{i+1} \cap G_iN) \\ &\cong (G_{i+1}/G_i)/((G_{i+1} \cap G_iN)/G_i).\end{aligned}$$

因为 G_{i+1}/G_i 是循环群，所以 $\overline{G}_{i+1}/\overline{G}_i$ 是循环群. 从而 $\overline{G}$ 是超可解群. ▌

定义 3 群 G 称为**幂零的**，如果存在 G 的一个子群列

$$\{1\} = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n = G, \tag{2}$$

其中 $G_i < G$，并且 $G_{i+1}/G_i \subset Z(G/G_i)$，$0\leqslant i<n$.

命题 5.9.2 幂零群一定是超可解群.

***证明** 设 G 是幂零群. 因为 $G_1/G_0 \subset Z(G/G_0)$，所以 G_1 是 abel 群，从而 G_1 超可解. 于是 G_1 有子群列

$$\{1\} = G_1^{(0)} \subset G_1^{(1)} \subset \cdots \subset G_1^{(m)} = G_1, \tag{3}$$

其中 $G_1^{(i)} \lhd G_1$，并且 $G_1^{(i+1)}/G_1^{(i)}$ 是循环群，$0\leqslant i<m$. 因为 $G_1 \subset Z(G)$，所以 $G_1^{(i)} \lhd G$，$0\leqslant i\leqslant m$. 因为 $G_2/G_1 \subset Z(G/G_1)$，所以 G_2/G_1 是 abel 群. 设 $G_2/G_1 = \langle g_1G_1\rangle \times \langle g_2G_1\rangle \times \cdots \times \langle g_rG_1\rangle$，其中 $g_i \in G_2 \backslash G_1$，$1\leqslant i\leqslant r$. 考虑

$$G_1 \subset \langle G_1, g_1\rangle \subset \langle G_1, g_1, g_2\rangle \subset \cdots \subset \langle G_1, g_1, \cdots, g_r\rangle = G_2. \tag{4}$$

任取 $x_1\in G_1$，则有 $g_1x_1=(g_1x_1g_1^{-1})g_1\in G_1\cdot\langle g_1\rangle$. 因此 $\langle G_1,g_1\rangle=G_1\cdot\langle g_1\rangle$. 又 $G_1\cap\langle g_1\rangle=\{1\}$，并且 $G_1\lhd\langle G_1,g_1\rangle$，因此 $\langle G_1,g_1\rangle$ 是 G_1 与 $\langle g_1\rangle$ 的半直积，从而 $\langle G_1,g_1\rangle$ 中每一个元素可唯一地表成形式 x_1g_1，其中 $x_1\in G_1$. 任意 $g\in G$，有

$$g^{-1}(x_1g_1)g=(g^{-1}x_1g)(g^{-1}g_1g).$$

因为 $G_2/G_1\subset Z(G/G_1)$，所以 $(g_1G_1)(gG_1)=(gG_1)(g_1G_1)$，从而 $g^{-1}g_1g=g_1y_1$ 对于某个 $y_1\in G_1$. 于是 $g^{-1}(x_1g_1)g=(g^{-1}x_1g)g_1y_1\in\langle G_1,g_1\rangle$. 因此 $\langle G_1,g_1\rangle\lhd G$. 又由于 $\langle G_1,g_1\rangle/G_1\cong\langle g_1\rangle$，所以 $\langle G_1,g_1\rangle/G_1$ 是循环群. 类似可证 $\langle G_1,g_1,g_2\rangle,\cdots,\langle G_1,g_1,\cdots,g_{r-1}\rangle$ 都是 G 的正规子群，并且 $\langle G_1,g_1,g_2\rangle/\langle G_1,g_1\rangle,\cdots,\langle G_1,g_1,\cdots,g_r\rangle/\langle G_1,g_1,\cdots,g_{r-1}\rangle$ 都是循环群. 把(3)和(4)连结起来便得出 G_2 是超可解群.

类似地，由于 $G_3/G_2\subset Z(G/G_2)$，所以 G_3/G_2 是 abel 群，从而可得到从 G_2 到 G_3 的子群列，再与 G_2 的子群列连结起来可得出 G_3 是超可解群. 依次进行下去，便可得出 G 是超可解群. ∎

命题 5.9.3 p-群一定是幂零群.

***证明** 设群 G 的阶是 p^s，其中 p 是素数，$s>0$. 若 G 是 abel 群，则 G 显然是幂零的. 下设 G 非 abel. 则 $Z(G)\neq\{1\}$. 令 $G_0=\{1\}$，$G_1=Z(G)$. 记 $Z(G/G_1)=G_2/G_1$. 若 $Z(G/G_1)\neq G/G_1$，则继续考虑 $Z(G/G_2)=G_3/G_2,\cdots$，于是得到 G 的一个子群列

$$\{1\}=G_0\subset G_1\subset G_2\subset G_3\subset\cdots$$

由于 G/G_1 仍为非 abel 群，所以 $Z(G/G_1)\neq\{\bar{1}\}$，从而 $G_2\neq G_1$. 同理 $G_3\neq G_2,\cdots$. 由于 G 是有限群，所以上述子群列必在有限步后终止于 G，即

$$\{1\}=G_0\subset G_1\subset G_2\subset\cdots\subset G_n=G,$$

其中 $G_{i+1}/G_i=Z(G/G_i)$，$0\leqslant i<n$. 任意 $g_2\in G_2$，任意 $g\in G$，因为 $G_2/G_1=Z(G/G_1)$，所以 $(g_2G_1)(gG_1)=(gG_1)(g_2G_1)$，从而得到：$g^{-1}g_2g=g_2y_1$，其中 $y_1\in G_1$. 于是 $G_2\lhd G$. 同理 $G_3\lhd G,\cdots,G_{n-1}\lhd$

G. 因此 G 是幂零群. ▌

综上所述，有限群有下列关系：

$$p\text{ 群} \Rightarrow \text{幂零群} \Rightarrow \text{超可解群} \Rightarrow \text{可解群}.$$

引理 5.9.1 设 G 是非 abel 群，若 G 有 abel 正规子群 A，使得 G/A 是超可解群，则 G 必有 abel 正规子群 H 使得 $H \not\subset Z(G)$.

证明 可设 $A \subset Z(G)$，否则取 $H=A$ 即可. 因为 $G/Z(G) \cong (G/A)/(Z(G)/A)$，并且由于 G/A 超可解，所以 $G/Z(G)$ 超可解并且 $G/Z(G) \neq \{\bar{1}\}$. 于是存在 $G/Z(G)$ 的一个子群列

$$\{1\} = G_0/Z(G) \subset G_1/Z(G) \subset \cdots \subset G_m/Z(G) = G/Z(G),$$

其中 $G_i/Z(G) \triangleleft G/Z(G)$，并且 $(G_{i+1}/Z(G))/(G_i/Z(G))$ 是循环群，$0 \leqslant i < m$. 于是有 $G_1 < G$，并且 $G_1/Z(G)$ 是循环群. 因为 $G_1/Z(G_1) \cong (G_1/Z(G))/(Z(G_1)/Z(G))$，所以 $G_1/Z(G_1)$ 也是循环群，从而 G_1 为 abel 群. 因为 $G/Z(G) \neq \{\bar{1}\}$，所以 $G_1 \neq Z(G)$. 取 $H=G_1$ 即可. ▌

定理 5.9.2 设 K 是有限群 G 的所有子群的分裂域并且 $\mathrm{char}K=0$，如果 G 有 abel 正规子群 A 使得 G/A 为超可解群，则 G 是关于 K 的 M-群.

证明 若 G 是 abel 群，则显然 G 是 M-群. 下面设 G 是非 abel 群. 对 $|G|$ 用归纳法. 任取 G 的一个不可约 K-表示 φ.

情形 1 若 φ 不是忠实的，令 $\overline{G}=G/\mathrm{Ker}\varphi$，则 $|\overline{G}|<|G|$. 由于分裂域是商群继承的，因此 K 是 $\overline{G}$ 的所有子群的分裂域. 因为 $A\cdot\mathrm{Ker}\varphi \triangleleft G$，所以 $A\cdot\mathrm{Ker}\varphi/\mathrm{Ker}\varphi < G/\mathrm{Ker}\varphi$. 因为 $A\cdot\mathrm{Ker}\varphi/\mathrm{Ker}\varphi \cong A/A\cap\mathrm{Ker}\varphi$，所以 $A\cdot\mathrm{Ker}\varphi/\mathrm{Ker}\varphi$ 是 abel 群. 因为

$$\begin{aligned}&(G/\mathrm{Ker}\varphi)/(A\cdot\mathrm{Ker}\varphi/\mathrm{Ker}\varphi)\\&\quad\cong G/A\cdot\mathrm{Ker}\varphi \cong (G/A)/(A\cdot\mathrm{Ker}\varphi/A),\end{aligned}$$

所以从 G/A 超可解可推出 $(G/\mathrm{Ker}\varphi)/(A\cdot\mathrm{Ker}\varphi/\mathrm{Ker}\varphi)$ 也超可解. 于是 $\overline{G}$ 满足定理 5.9.2 所列的条件，从而由归纳假设知，$\overline{G}$ 的不可约表示 $\bar{\varphi}$（它提升后即为 φ）是 $\overline{G}$ 的某个子群 $\overline{G}_1=G_1/\mathrm{Ker}\varphi$ 的 1 次表示 $\bar{\psi}$ 的诱导表示. $\bar{\psi}$ 的提升记作 ψ，它是 G_1 的 1 次表示. 类似于

定理 5.9.1 证明中末段的论述，从 $\bar{\varphi}=\bar{\psi}^{G}$ 可以推出 $\varphi=\psi^{G}$.

情形 2 设 φ 是忠实的. 因为 G 有 abel 正规子群 A 使得 G/A 超可解，所以 G 有 abel 正规子群 $H\not\subset Z(G)$. 设 χ 是 φ 提供的特征标，设 μ 是 $\chi|H$ 的不可约成分. 据 Blichfeldt 定理知，χ 可以由 G 的真子群 G_μ 的某个不可约特征标 ν 诱导出，即 $\chi=\nu^{G}$. 显然 $G_\mu\cap A$ 是 G_μ 的 abel 正规子群，且有 $G_\mu/(G_\mu\cap A)\cong(AG_\mu)/A$. 因为 $(AG_\mu)/A$ 是 G/A 的子群，所以 AG_μ/A 超可解，从而 $G_\mu/(G_\mu\cap A)$ 超可解. 于是 G_μ 满足定理 5.9.2 的条件. 又因为 $|G_\mu|<|G|$，据归纳假设得，G_μ 的不可约特征标 ν 可以由 G_μ 的某个子群 L 的 1 次特征标 λ 诱导出，即 $\nu=\lambda^{G_\mu}$. 从而得到

$$\chi=\nu^{G}=(\lambda^{G_\mu})^{G}=\lambda^{G}.$$

综上所述得出，G 是关于 K 的 M-群. ▌

推论 5.9.1 超可解群是关于 K 的 M-群，其中 K 是这个群的所有子群的分裂域并且 $\mathrm{char}K=0$.

证明 在定理 5.9.2 中取 $A=\{1\}$ 即得结论. ▌

推论 5.9.2 设 K 是有限群 G 的所有子群的分裂域，并且 $\mathrm{char}K=0$，若 G 是 p-群或幂零群，则 G 是关于 K 的 M-群. ▌

推论 5.9.3 设 K 是有限群 G 的所有子群的分裂域，并且 $\mathrm{char}K=0$. 若 G 是亚 abel 群（即 G 是非 abel 群，但 G 有一个 abel 正规子群 A 使得 G/A 为 abel 群），则 G 是关于 K 的 M-群. ▌

推论 5.9.4 设 K 是有限群 G 的所有子群的分裂域，并且 $\mathrm{char}K=0$. 若 $|G|=p_1p_2\cdots p_s$，其中 $p_1,p_2,\cdots,p_s$ 是互不相同的素数，则 G 是关于 K 的 M-群.

证明 此时 G 的每个 Sylow p_i-子群都是循环群，从而 G 是亚 abel 群. ▌

定义 4 若群 G 不是超可解群，但是它的每一个真子群（真商群）是超可解群，则称 G 为**内（外）超可解群**. 若 G 不是超可解群，但它的每一个真子群和每一个真商群是超可解群，则称 G 是**极小非超可解群**.

作者证明了：极小非超可解群是关于域 K 的 M-群，可解外超可解群是关于域 K 的 M-群，其中 K 是代数闭域（或 G 的所有子群的分裂域）并且 $\mathrm{char}K=0$.（见[17]）

作者还把定理 5.9.2 推广成：

定理 5.9.3 若有限群 G 是 abel 正规子群 A 与极小非超可解群 H 的半直积，则 G 是关于域 K 的 M-群，其中 K 是代数封闭域（或 G 的所有子群的分裂域）并且 $\mathrm{char}K=0$.

证明 见[17]. ▌

以上我们讨论的都是一个群是 M-群的充分条件，下面的定理给出了 M-群的必要条件.

定理 5.9.4（Taketa） 设 G 是有限群，域 K 的特征不能整除 $|G|$，如果 G 是关于域 K 的 M-群，则 G 是可解群.

***证明** 考虑 G 的子群列

$$G\supset G'\supset G''\supset\cdots\supset G^{(i)}\supset\cdots$$

假如 G 不可解，则存在正整数 m 使得 $G^{(m)}=G^{(m+1)}\neq\{1\}$. 设 φ_1, $\varphi_2,\cdots,\varphi_s$ 是 G 的全部不等价的不可约 K-表示，则 $\bigcap\limits_{i=1}^{s}\mathrm{Ker}\varphi_i=\{1\}$. 因为 $G^{(m)}\neq\{1\}$，所以必有 $\mathrm{Ker}\varphi_j$ 使得 $G^{(m)}\not\subset\mathrm{Ker}\varphi_j$. 选取 φ_j 使得 $G^{(m)}\not\subset\mathrm{Ker}\varphi_j$ 并且 φ_j 的次数为最小. 因为 G' 必含于 G 的每一个 1 次表示的核里，所以上述选取的 φ_j 其次数必大于 1. 因为 G 是 M-群，所以 φ_j 是 G 的某个子群 H 的 1 次表示 ψ 的诱导表示，并且 $H\neq G$. 设 $\{g_1=1,g_2,\cdots,g_t\}$ 是 H 在 G 中的左陪集代表系. 把集合 $\{g_iH\mid i=1,2,\cdots,t\}$ 记作 G/H. 据习题 5.1 的第 3 题，G 在 G/H 上的左平移作用引起的 G 的置换表示是 H 的主表示 1_H 的诱导表示. 从而 $(1_H)^G$ 可约. 任取 $(1_H)^G$ 的不可约成分 φ_{i_r}，有

$$\deg\varphi_{i_r}<\deg(1_H)^G=[G:H]=\deg\psi^G=\deg\varphi_j.$$

由 φ_j 的选取得，$G^{(m)}\subset\mathrm{Ker}\varphi_{i_r}$. 从而得 $G^{(m)}\subset\mathrm{Ker}(1_H)^G$. 任意 $y\in G^{(m)}$，有 $(1_H)^G(y)$ 是单位矩阵，从而 $\dot{1}_H(y)=1$. 由此得出 $y\in H$，因

此 $G^{(m)}\subset H$. 从而 $G^{(m)}=G^{(m+1)}=(G^{(m)})'\subset H'$. 因为 ψ 是 H 的 1 次表示，所以 $H'\subset \mathrm{Ker}\psi$. 于是 $G^{(m)}\subset \mathrm{Ker}\psi$. 因为 $G^{(m)}\lhd G$，所以对于任意 $y\in G^{(m)}$ 有 $\Psi^G(y)=(\Psi(g_i^{-1}yg_j))=I$，其中 I 是单位矩阵. 由此看出 $y\in \mathrm{Ker}\psi^G=\mathrm{Ker}\varphi_j$，从而 $G^{(m)}\subset \mathrm{Ker}\varphi_j$. 这与 φ_j 的选择矛盾.

∎

注意 可解群不一定是 M-群，例子可参看本节习题第 1 题.

习 题 5.9

1. 设 G 为习题 5.4 第 1 题中的群 G，证明：G 是可解群，但是 G 不是 M-群.

(**提示**：习题 5.4 第 1 题已求出 G 的复特征标表，从特征标表求出 G 的所有正规子群，从而可找出 G 的一个正规子群列；并且也可看出 G 没有指数为 2 的子群，因此 G 的 2 次不可约表示不是单项表示.)

2. 若 G_1 和 G_2 都是 M-群，证明：$G_1\times G_2$ 也是 M-群.

§10 Brauer 关于诱导特征标的定理

上一节指出：对于 M-群 G，它的每一个不可约特征标可由它的子群的 1 次特征标诱导出，从而 G 的每一个特征标可以表示成一些子群的 1 次特征标的诱导特征标的非负整系数线性组合. 这样对于这种类型的群可将任意特征标的问题简化为子群的 1 次特征标的问题，这在应用中起了很重要的作用. 但是我们又知道，并非每一个有限群都是 M-群. 因此本节来研究对于任一有限群 G，它的任一特征标能否表示成它的某些子群的 1 次特征标的诱导特征标的整系数线性组合，这些子群是什么样的子群？Brauer 给出了这一问题的圆满解答，本节将介绍这些结果，我们将采用 Goldschmidt 的证明. 首先介绍一些概念.

定义 1 设 H 是有限群 G 的子群，如果 H 是某个 p-子群 P

与某个阶与 p 互素的循环子群 C 的直积，其中 p 是素数，则称 H 是 G 的**初等子群**.

显然，若 H 是 G 的 p-子群，则 H 是 G 的初等子群；若 H 是 G 的循环子群 $\langle a\rangle$，由于 $\langle a\rangle=\langle a_1\rangle\times\langle a_2\rangle$，其中 $\langle a_1\rangle$ 的阶为某个素数 p 的方幂，$\langle a_2\rangle$ 的阶与 p 互素，因此 H 是 G 的初等子群. 由此看出，任一有限群 G 总有初等子群（譬如 G 的 Sylow p-子群就是初等子群）.

定义 2 设 H 是有限群 G 的子群，如果 H 是某个 p-子群 P 与某个阶与 p 互素的正规（在 H 中正规）循环子群 C 的半直积，其中 p 是素数，则称 H 是 G 的**准初等子群**.

显然，G 的任一初等子群是准初等的. 容易看出，准初等子群的任一子群仍是准初等的. 初等子群的子群仍是初等子群.

G 的所有准初等子群组成的集合记作 $\mathscr{Q}$. 容易看出，若 $H,L\in\mathscr{Q}$，则 $L\cap gHg^{-1}\in\mathscr{Q},\forall\ g\in G$.

设域 K 的特征不能整除有限群 G 的阶，考虑 G 的广义特征标环 char(G) 的加法子群：

$$\mathscr{B}(G;\mathscr{Q})=\langle(1_H)^G\mid H\in\mathscr{Q}\rangle,$$

其元素是 G 的一些准初等子群的主特征标的诱导特征标的整系数线性组合.

命题 5.10.1 $\mathscr{B}(G;\mathscr{Q})$ 是 char(G) 的子环.

证明 设 H、$L\in\mathscr{Q}$，设 $\{x_1,x_2,\cdots,x_t\}$ 是 (L,H) 在 G 中的双陪集代表系. 对于每一个 $i(1\leqslant i\leqslant t)$，任意 $y\in x_iHx_i^{-1}$，有 $1_H^{(i)}(y)=1_H(x_i^{-1}yx_i)=1$. 因此 $1_H^{(i)}$ 是 $x_iHx_i^{-1}$ 的主特征标. 令 $L_i=L\cap x_iHx_i^{-1}$，于是 $1_H^{(i)}|L_i=1_{L_i}$. 因为

$$\begin{aligned}(1_L)^G\cdot(1_H)^G&=[1_L\cdot(1_H)^G|L]^G=[(1_H)^G|L]^G\\&=\Big[\sum_{i=1}^{t}(1_H^{(i)}|L_i)^L\Big]^G=\sum_{i=1}^{t}[(1_{L_i})^L]^G\\&=\sum_{i=1}^{t}(1_{L_i})^G\in\mathscr{B}(G;\mathscr{Q}),\end{aligned}$$

所以 $\mathscr{B}(G;\mathscr{D})$是 char$(G)$的子环. ▌

环 $\mathscr{B}(G;\mathscr{D})$称为 G 关于 $\mathscr{D}$ 的 **Burnside 环**.

引理 5.10.1 设 R 是有限集合 G 的一些整值函数(即 G 到 $\mathbf{Z}$ 的映射)组成的环. 如果对于每一个素数 p 和每一个 $g\in G$,存在一个函数 $f_{g,p}\in R$ 使得 $f_{g,p}(g)\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$,那末 $1_G\in R$,其中 1_G 是在 G 的每个元素上取值为 1 的函数.

证明 任给 $g\in G$,考虑集合 $I_g:=\{f(g)\mid f\in R\}$. 显然 I_g 对减法封闭;对于任意 $f(g)\in I_g$,任意 $m\in\mathbf{Z}$,且 $m>0$,有

$$mf(g)=(f+\cdots+f)(g)\in I_g,$$

$$(-m)f(g)=-[mf(g)]=[-(mf)](g)\in I_g,$$

所以 I_g 是整数环 $\mathbf{Z}$ 的理想. 从而存在某个正整数 n 使得 $I_g=(n)$. 假如 $n\neq 1$,设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$,其中 $p_1,p_2,\cdots,p_s$ 是互不相同的素数,$\alpha_i>0(1\leqslant i\leqslant s)$. 由已知条件,对于 p_1,存在函数 $f_{g,p_1}\in R$ 使得 $f_{g,p_1}(g)\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,p_1)$. 由于 $f_{g,p_1}(g)\in I_g$,所以 $n\mid f_{g,p_1}(g)$. 从而有 $p_1\mid f_{g,p_1}(g)$,矛盾. 所以 $n=1$,即 $I_g=\mathbf{Z}$. 因此 R 中有一个函数 f_g 使得 $f_g(g)=1$. 从而

$$\Big[\prod_{g\in G}(1_G-f_g)\Big](x)=0,\quad \forall\, x\in G,$$

所以 $\prod\limits_{g\in G}(1_G-f_g)=0$,把左边展开,移项即得 $1_G\in R$. ▌

命题 5.10.2 设 G 是有限群,$\mathscr{D}$ 的意义同上,域 K 的特征为零,则 $1_G\in\mathscr{B}(G;\mathscr{D})$.

证明 只要证 $\mathscr{B}(G;\mathscr{D})$满足引理 5.10.1 的条件. 任给素数 p,任给 $g\in G$,设 g 的阶为 $p^l m$,其中$(m,p)=1,l\geqslant 0$. 令 $C=\langle g^{p^l}\rangle$,则$|C|=m$. 令 $N=N_G(C)$,于是 $C\lhd N$. 显然 $g\in N$. 设 P 是 N 的 Sylow p-子群且使得 $g^m\in P$. 设 $H=PC$,显然 $C\lhd H$,$P\cap C=\{1\}$,所以 H 是 P 与 C 的半直积,从而 $H\in\mathscr{D}$.

现在来证$(1_H)^G(g)\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$. 设$\{x_1=1,x_2,\cdots,x_t\}$是 H 在 G 中的左陪集代表系,则

$$(1_H)^G(g) = \sum_{i=1}^{t} 1_H(x_i^{-1}gx_i) = |\{i \mid x_i^{-1}gx_i \in H\}| .$$

任意 $x\in G$,若 $x^{-1}gx\in H$,则 $x^{-1}g^{p^l}x\in H$,从而 $x^{-1}Cx\subset H$. 因为 $H=PC$,而 $x^{-1}Cx$ 的阶与 p 互素,所以 $x^{-1}Cx\subset C$. 从而 $x^{-1}Cx=C$,这说明 $x\in N_G(C)=N$. 又由 $x^{-1}gx\in H$,可推出 $gx\in xH$,从而 $g(xH)=(gx)H=xH$. 反之,若 $g(xH)=xH$,则 $gx\in xH$,从而 $x^{-1}gx\in H$. 所以 $x^{-1}gx\in H$ 当且仅当 $x\in N$ 并且 $g(xH)=xH$. 因为 $H=PC<N$,由 $G=x_1H\cup\cdots\cup x_tH$ 可得到

$$N = N \cap G = [(x_1H) \cap N] \cup \cdots \cup [(x_tH) \cap N].$$

若有 $y\in x_iH\cap N$,则 $y=x_ih$ 对于某个 $h\in H$. 从而 $x_i=yh^{-1}\in N$. 于是 $x_iH\subset N$. 因此 $x_iH\cap N=x_iH$ 当 $x_iH\cap N\neq\varnothing$ 时. 这说明 $x_iH\cap N$ 或者是空集,或者等于 x_iH. 于是可设

$$N = H \cup x_2H \cup \cdots \cup x_rH, \quad r \leqslant t.$$

由上述得,$(1_H)^G(g)$等于 H 在 N 里的被 g 固定的左陪集的数目.

任意 $c\in C$,对于每个 $i(1\leqslant i\leqslant r)$,有

$$c(x_iH) = (cx_i)H = x_i(x_i^{-1}cx_i)H = x_iH.$$

考虑$\langle g\rangle$在商集 N/H 上的作用(注意 $g\in N$). 于是得到$\langle g\rangle$到集合 N/H 的全变换群($\cong S_r$)的一个同态 φ. 因为 $g^{p^l}\in C$,所以 $\varphi(g^{p^l})$是集合 N/H 的恒等映射. 从而 $\varphi(g)$的阶能整除 p^l. 设 $\varphi(g)$的阶为 p^s,其中 $s\leqslant l$. 由于 $\varphi(g)$的阶是 $\varphi(g)$的轮换分解式中各个轮换的长度的最小公倍数,所以 $\varphi(g)$的每一个非 1-轮换的长等于 p 的正整数次幂. 另一方面,因为 H 包含 N 的 Sylow p-子群 P,而 $r=[N:H]$,所以 r 与 p 互素. 由于 $\varphi(g)$的轮换分解式中所有轮换(包括 1-轮换)的长度之和等于 r,因此 p 不能整除 $\varphi(g)$的不动点数目,即 p 不能整除被 g 固定的 H 在 N 中的左陪集的数目,而这个数目等于$(1_H)^G(g)$. 所以$(1_H)^G(g)\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$. 由引理 5.10.1 即得 $1_G\in\mathscr{B}(G;\mathscr{Q})$. ▌

定理 5.10.1(Brauer) 设域 K 的特征为 0,并且 K 是有限群 G 的所有子群的分裂域. 设 ξ 是 G 的类函数,则下列命题等价:

(i) ξ 是 G 的初等子群的 1 次特征标的诱导特征标的整系数线性组合；

(ii) ξ 是 G 的广义特征标；

(iii) 对于 G 的每一个初等子群 H，都有 $\xi|H$ 是 H 的广义特征标.

证明 设 $\mathscr{E}$ 是 G 的所有初等子群组成的集合. 设

$$\mathscr{T}=\{G\text{ 的初等子群的 1 次特征标的诱导特征标的整系数线性组合}\}.$$

显然，$\mathscr{T}$ 是 char(G)的加法子群. 设

$$\mathscr{R}=\{\xi\in cf_K(G)\,|\,\xi|H\in \mathrm{char}(H),H\in\mathscr{E}\}.$$

易看出 $\mathscr{R}$ 是 $cf_K(G)$的子环. 显然有

$$\mathscr{T}\subset \mathrm{char}(G)\subset\mathscr{R}.$$

因此为了证定理 5.10.1，就只要证 $\mathscr{T}=\mathscr{R}$.

首先证 $\mathscr{T}$ 是环 $\mathscr{R}$ 的理想. 任取 $\xi\in\mathscr{T}$，$\eta\in\mathscr{R}$，设 $\xi=\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\lambda_i^G$，其中 λ_i 是 G 的初等子群 H_i 的 1 次特征标，$1\leqslant i\leqslant n$. 则

$$\xi\eta=\sum_{i=1}^{n}m_i(\lambda_i^G\eta)=\sum_{i=1}^{n}m_i[\lambda_i(\eta|H_i)]^G.$$

因为 $\eta|H_i\in\mathrm{char}(H_i)$，所以 $\lambda_i(\eta|H_i)\in\mathrm{char}(H_i)$. 于是存在整数 l_{ij}使得 $\lambda_i(\eta|H_i)=\sum\limits_{j=1}^{r_i}l_{ij}\mu_{ij}$，其中 $\mu_{ij}\in\mathrm{Irr}(H_i)$. 因此

$$\xi\eta=\sum_{i=1}^{n}m_i\Big(\sum_{j=1}^{r_i}l_{ij}\mu_{ij}\Big)^G=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r_i}m_il_{ij}\mu_{ij}^G.\tag{1}$$

因为 H_i 是初等子群，所以 $H_i=P_i\times C_i$，其中 P_i 是 p-群，C_i 是其阶与 p 互素的循环群. 于是 $H_i/C_i\cong P_i$. 由于 p-群是超可解群，据定理 5.9.2 得，H_i 的每一个不可约特征标 μ_{ij}是 H_i 的某个子群的 1 次特征标的诱导特征标. 容易看出，初等子群的子群仍是初等子群. 据诱导特征标的传递性得，μ_{ij}^G是 H_i 的初等子群的 1 次特征标的诱导特征标，于是由(1)式得到 $\xi\eta\in\mathscr{T}$. 所以 $\mathscr{T}$ 是环 $\mathscr{R}$ 的理

想.

其次证 $1_G \in \mathscr{T}$. 据命题 5.10.2, $1_G \in \mathscr{B}(G;\mathscr{Q})$. 由于 $\mathscr{B}(G;\mathscr{Q})$里的元素是 G 的一些准初等子群的主特征标的诱导特征标的整系数线性组合，于是如果我们能证明每一个准初等子群 L 的主特征标 1_L 是 L 的初等子群的 1 次特征标的诱导特征标的整系数线性组合，由诱导的传递性，就可得出 $(1_L)^G \in \mathscr{T}$，从而得 $1_G \in \mathscr{T}$. 设 $L=PC$，其中 P 是 p-群，C 是其阶与 p 互素的正规循环子群，设 $N=N_L(P)$. 因为 $P \subset N_L(P)=N$，所以 $N=P\times(N\cap C)$. 于是 N 是 L 的初等子群，由初等子群的定义知，N 也是 G 的初等子群. 如果 $L=N$，则 L 本身是初等子群，从而 $(1_L)^G \in \mathscr{T}$. 若 $N \neq L$，设 $1_L, \nu_2, \cdots, \nu_s$ 是 L 的全部不同的不可约特征标，则

$$(1_N)^L = a_1 1_L + \sum_{i=2}^{s} a_i \nu_i,$$

其中 a_i 是非负整数$(1\leqslant i\leqslant s)$. 我们有

$$a_1 = \langle (1_N)^L, 1_L\rangle_L = \langle 1_N, (1_L)|N\rangle_N = \langle 1_N, 1_N\rangle_N = 1.$$

把 $a_i=0$ 的项去掉，不妨设

$$(1_N)^L = 1_L + \sum_{i=2}^{t} a_i \nu_i, \quad a_i > 0(2 \leqslant i \leqslant t). \tag{2}$$

假如对于某个 $i(2\leqslant i\leqslant t)$, $\nu_i(1)=1$，则 $\nu_i|N$ 是 N 的 1 次特征标. 因为

$$\langle \nu_i|N, 1_N\rangle_N = \langle \nu_i, (1_N)^L\rangle_L = a_i > 0,$$

所以 $\nu_i|N=1_N$. 从而 $N\subset \mathrm{Ker}\nu_i =: M$. 因为 ν_i 是 1 次特征标，并且 $\nu_i \neq 1_L$，所以 M 是 L 的真正规子群. 因为 $P\subset N\subset M$，所以 P 是 M 的 Sylow p-子群. 任意 $g\in L$, gPg^{-1}也是 M 的 Sylow p-子群，因此存在 $y\in M$ 使得 $y(gPg^{-1})y^{-1}=P$，从而得 $yg\in N_G(P)=N$，于是 $g\in M$. 从而得到 $L=M$，矛盾. 所以对于每个 $i(2\leqslant i\leqslant t)$，都有 $\nu_i(1)>1$.

因为 L 有正规循环子群 C，并且 $L/C\cong P$ 是 p-群，所以 L 是关于 K 的 M-群. 由于 $\nu_i(2\leqslant i\leqslant t)$非 1 次特征标，因此每个 $\nu_i(2\leqslant i$

$\leqslant t$)是 L 的真子群 L_i 的 1 次特征标 ω_i 的诱导特征标. 于是(2)式成为

$$1_L = (1_N)^L - \sum_{i=2}^{t} a_i \omega_i^L. \tag{3}$$

因为 L 是 G 的准初等子群,所以 L_i 仍为准初等子群,并且 $|L_i| < |L|$. 于是我们可以运用归纳法,假设对于阶小于 $|L|$ 的准初等子群,它的主特征标可以表示成它的初等子群的 1 次特征标的诱导特征标的整系数线性组合. 现在来看 1_L. 由归纳假设,L_i 的主特征标 $1_{L_i} = \sum_j b_j \varepsilon_{ij}^{L_i}$,其中 ε_{ij} 是 L_i 的初等子群 L_{ij} 的 1 次特征标,b_j 是整数. 于是

$$\begin{aligned}\omega_i &= \omega_i \cdot 1_{L_i} = \omega_i\Big(\sum_j b_j \varepsilon_{ij}^{L_i}\Big) = \sum_j b_j \omega_i \varepsilon_{ij}^{L_i} \\ &= \sum_j b_j [(\omega_i | L_{ij})\varepsilon_{ij}]^{L_i}.\end{aligned}$$

因为 $(\omega_i|L_{ij})\varepsilon_{ij}$ 是 L_{ij} 的 1 次特征标,所以 ω_i 可表成 L_i 的初等子群的 1 次特征标的诱导特征标的整系数线性组合. 于是从(3)式看出: 1_L 是 L 的初等子群的 1 次特征标的诱导特征标的整系数线性组合. 由归纳法原理得,对于 G 的任一准初等子群,其主特征标均可表成它的初等子群的 1 次特征标的诱导特征标的整系数线性组合. 从而 $1_G \in \mathscr{T}$. 所以 $\mathscr{T} = \mathscr{R}$. ▌

定理 5.10.2(Brauer) 设 K 是有限群 G 的所有子群的分裂域且 $\mathrm{char} K = 0$,则 G 的每一个特征标是 G 的初等子群的 1 次特征标的诱导特征标的整系数线性组合. ▌

定理 5.10.1 和 5.10.2 有许多重要应用. 本节先介绍它的一个应用. 在下一节将介绍它在分裂域理论中的应用.

定理 5.10.3(Brauer) 设 G 是有限群,χ 是 G 的不可约复特征标,p 是素数,则下列命题等价:

(i) $\chi(g) = 0$,对于每一个其阶能被 p 整除的元素 g;

(ii) $\chi(g) = 0$,对于每一个其阶能被 p 的方幂整除的元素 g;

(iii) $\frac{|G|}{\chi(1)}\not\equiv 0 \pmod{p}$.

证明 (i) $\Rightarrow$(ii) 显然.

(ii) $\Rightarrow$(iii). 设$|G|=p^l m$,其中 $p\nmid m$. 设 P 是 G 的 Sylow p-子群. 由(ii)知,任意 $g\in P$,且 $g\neq 1$,有 $\chi(g)=0$. 因为

$$(\chi|P,1_P)_P=\frac{1}{|P|}\sum_{g\in P}\chi(g)=\frac{1}{|P|}\chi(1),$$

所以 $p^l|\chi(1)$,从而$\frac{|G|}{\chi(1)}$与 p 互素,即$\frac{|G|}{\chi(1)}\not\equiv 0 \pmod{p}$.

(iii) $\Rightarrow$(i). 首先证一个结论:"设 $H=P_1\times Q\subset G$,其中 P_1 是 p-群或单位子群,$p\nmid|Q|$,设$\frac{|G|}{\chi(1)}$与 p 互素,则对所有 $\nu\in \mathrm{Irr}(Q)$有$(\nu,\chi|Q)$能被$|P_1|$整除."

设 $n=\frac{|G|}{\chi(1)}$. 任取 $y\in Q$,据命题 3.5.3 知,

$$\frac{|G|\chi(y)}{|C_G(y)|\chi(1)}$$

是代数整数. 因为 $P_1\subset C_G(y)$,所以$|C_G(y)|=|P_1|r$. 于是

$$\frac{|G|\chi(y)}{|C_G(y)|\chi(1)}=\frac{n\chi(y)}{|P_1|r}.$$

由此得出:$\frac{n\chi(y)}{|P_1|}$是代数整数. 据(iii)的假设,$n=\frac{|G|}{\chi(1)}$与 p 互素,从而 n 与$|P_1|$互素. 于是存在整数 a,b 使得 $an+b|P_1|=1$. 从而得

$$\frac{\chi(y)}{|P_1|}=\frac{an\chi(y)}{|P_1|}+b\chi(y).$$

上式表明$\frac{\chi(y)}{|P_1|}$是代数整数. 现在选择整数 d,e 使得 $d|P_1|+e|Q|=1$. 则

$$\frac{(\nu,\chi|Q)}{|P_1|}=d(\nu,\chi|Q)+\frac{e|Q|}{|P_1|}(\nu,\chi|Q)$$

$$=d(\nu,\chi|Q)+e\frac{1}{|P_1|}\sum_{y\in Q}\nu(y^{-1})\chi(y)$$

$$= d(\nu,\chi|Q) + e\sum_{y\in Q}\nu(y^{-1})\,\frac{\chi(y)}{|P_1|}.$$

上式右边是代数整数，从而推出$|P_1|\,|\,(\nu,\chi|Q)$.

其次，我们定义G上的一个类函数如下：

$$\xi(g) = \begin{cases}\chi(g), & \text{当 } g \text{ 的阶不能被 } p \text{ 整除；}\\ 0, & \text{当 } g \text{ 的阶能被 } p \text{ 整除.}\end{cases}$$

下面来证$\xi=\chi$. 关键一步是证$\xi\in\mathrm{char}(G)$. 据定理 5.10.1，这只要证：对于G的每一个初等子群H有$\xi|H\in\mathrm{char}(H)$. 设$H=P_2\times C$，其中P_2是p_2-群，p_2是素数；C是其阶与p_2互素的循环群. 如果$p_2=p$，则P_2就是p-群. 如果$p_2\neq p$，且若$|C|$能被p整除，则$C=C_1\times C_2$，其中$p\,|\,|C_1|$，$p\nmid|C_2|$，于是$H=C_1\times(C_2\times P_2)$；若$p\nmid|C|$，则$H=1\times H$. 总之，可设$H=P_3\times Q$，其中$P_3$是$p$-群或单位子群，$p\nmid|Q|$. 据刚才证得的结论知，对于每一个$\nu\in\mathrm{Irr}(Q)$有$(\nu,\chi|Q)$能被$|P_3|$整除. 又由群的直积的表示知，$H$的每一个不可约特征标$\omega$满足$\omega(xy)=\mu(x)\nu(y)$，其中$\mu$是$P_3$的某个不可约特征标，$\nu\in\mathrm{Irr}(Q)$，$x\in P_3$，$y\in Q$. 任意$x\in P_3$且$x\neq1$，任意$y\in Q$，有$\xi(xy)=0$. 于是

$$\begin{aligned}(\omega,\xi|H)_H &= \frac{1}{|H|}\sum_{\substack{x\in P_3\\ y\in Q}}\overline{\omega(xy)}\xi(xy) = \frac{1}{|P_3|\,|Q|}\sum_{y\in Q}\overline{\mu(1)}\,\overline{\nu(y)}\xi(y)\\ &= \frac{\mu(1)}{|P_3|}\,\frac{1}{|Q|}\sum_{y\in Q}\overline{\nu(y)}\chi(y) = \frac{\mu(1)}{|P_3|}(\nu,\chi|Q)_Q.\end{aligned}$$

由此得出$(\omega,\xi|H)_H$是整数. 所以$\xi|H\in\mathrm{char}(H)$，于是$\xi\in\mathrm{char}(G)$. 设$S=\{g\in G\,|\,g$ 的阶不能被 p 整除$\}$，因为$1\in S$，所以

$$\begin{aligned}0<(\xi,\xi)_G &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\xi(g)\,\overline{\xi(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in S}|\chi(g)|^2\\ &\leqslant \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\chi(g)|^2 = (\chi,\chi)_G = 1.\end{aligned}$$

由于$(\xi,\xi)_G$是正整数，所以上式必为等式，从而得出$\chi(g)=0$，$\forall\, g\in G\backslash S$. ▌

*§11　分裂域的进一步讨论

在第四章§3中我们曾指出：任一代数封闭域都是有限群G的分裂域；还给出了域K是有限群G的分裂域的充分必要条件（见定理4.3.2和推论4.3.5）.本节将给出有限群G的分裂域的四个充分条件，其中之一将利用上一节的定理5.10.2.

设(φ,V)是群G的K-表示，设F是K的一个子域，如果能选择V的一个K-基使得对于一切$g\in G$，$\varphi(g)$在这个基下的矩阵的元素都属于F，则称φ**能在F里写出**.

不难看出，设(φ,V)是有限群G的任一n次K-表示，设H是K的任一子域，则一定存在K的一个子域F，它是在H上有限生成的，使得φ能在F里写出.事实上，由于G是有限群，对于V的一个K-基，φ提供的矩阵表示记作Φ，则$\{\Phi(g)$的(i,j)元$|g\in G,1\leqslant i,j\leqslant n\}$是有限集合，把它的元素都添加到$H$上得到的子域$F$就符合要求.

命题5.11.1　设(φ,V)是群G的n次K-表示，F是K的子域.则φ能在F里写出的充分必要条件是存在G的一个F-表示ψ使得$\varphi\approx\psi^K$.

证明　*必要性*　设(φ,V)能在F里写出，则存在V的一个K-基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$使得$\varphi$在这个基下提供的矩阵表示$\Phi$满足$\Phi(g)$的元素都属于$F(\forall g\in G)$.取域$F$上的一个$n$维向量空间$U$，在$U$中取一个基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，对于$g\in G$，令$\psi(g)(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\Phi(g)$，则$\psi$是$G$的$F$-表示.把$U$的基域$F$扩张到$K$，得到$K$上的向量空间$U^K$，其一个基为$1\otimes\beta_1,1\otimes\beta_2,\cdots,1\otimes\beta_n$.随之得到$G$的一个$K$-表示$\psi^K$，它在基$1\otimes\beta_1,1\otimes\beta_2,\cdots,1\otimes\beta_n$下提供的矩阵表示$\Psi^K$与$\psi$在基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$下提供的矩阵表示在写法上相同，从而$\Psi^K(g)=\Phi(g),\forall g\in G$.令$\sigma(\alpha_i)=1\otimes\beta_i(i=1,2,\cdots,n)$，则$\sigma$是$V$到$U^K$的同构，并且有

$$\psi^K(g)\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) = \psi^K(g)(1\otimes\beta_1,1\otimes\beta_2,\cdots,1\otimes\beta_n)$$
$$= (1\otimes\beta_1,1\otimes\beta_2,\cdots,1\otimes\beta_n)\Psi^K(g)$$
$$= (1\otimes\beta_1,1\otimes\beta_2,\cdots,1\otimes\beta_n)\Phi(g)$$
$$= \sigma(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\Phi(g) = \sigma\varphi(g)(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),$$

因此 $\psi^K(g)\sigma=\sigma\varphi(g)$，$\forall\ g\in G$. 从而 $\psi^K\approx\varphi$.

充分性 设 $\varphi\approx\psi^K$，其中(ψ,U)是 G 的 F-表示. 则存在 V 到 U^K 的同构 σ 使得 $\psi^K(g)\sigma=\sigma\varphi(g)$，$\forall\ g\in G$. 在 U 中取一个基 β_1，$\beta_2,\cdots,\beta_n$，ψ 在此基下提供的矩阵表示记作 Ψ. 易看出 $\varphi(g)$在基 $\sigma^{-1}(1\otimes\beta_1)$，$\sigma^{-1}(1\otimes\beta_2),\cdots,\sigma^{-1}(1\otimes\beta_n)$下的矩阵与 $\Psi(g)$在写法上相同($\forall\ g\in G$)，因此 φ 能在 F 里写出. ∎

定理 5.11.1 设 K 是有限群 G 的分裂域，F 是 K 的子域使得 G 的每一个不可约 K-表示都能在 F 里写出，则 F 是 G 的分裂域.

证明 假如 F 不是 G 的分裂域，则存在 G 的一个不可约 F-表示(φ,V)不是绝对不可约. 假如(φ^K,V^K)可约，则 V^K 有一个非平凡的 G 不变子空间 $\widetilde{W}$，使得 φ^K 的子表示 $\tilde{\varphi}=\varphi^K|\widetilde{W}$ 是不可约的. 由已知条件知：$\tilde{\varphi}$ 在 $\widetilde{W}$ 的适当一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 下能在 F 里写出. 令 W 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 在 F 上生成的 V 的子空间，令

$$\psi(g)(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r) = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)\tilde{\Phi}(g),$$

其中 $\tilde{\Phi}$ 是 $\tilde{\varphi}$在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 下的矩阵表示，则 ψ 是 G 的 F-表示，W 是 V 的非平凡 G 不变子空间，这与(φ,V)不可约矛盾. 因此(φ^K,V^K)不可约.

因为(φ,V)不是绝对不可约的，所以存在 F 的一个扩域 L 使得(φ^L,V^L)可约. 显然 L 是 F 的一个代数封闭的代数扩域 Ω 的子域(因为假如把 F 扩张到 Ω，仍有 φ^Ω 不可约，那么由于 Ω 是 G 的分裂域，进一步扩张 Ω 到 $\tilde{\Omega}$，有$(\varphi^\Omega)^{\tilde{\Omega}}$ 仍不可约. 易验证$(\varphi^\Omega)^{\tilde{\Omega}}=\varphi^{\tilde{\Omega}}$，这与 φ 不是绝对不可约矛盾). 设 Ω' 是 K 的代数封闭的代数扩域(由于任一代数封闭域都是 G 的分裂域，所以我们可以假定 K 是某个代数封闭域的子域)，由于 F 是 K 的子域，所以 Ω' 也是 F

的代数封闭的代数扩域，从而Ω'与Ω是F-同构的. 因此Ω'有一个子域L'与L是F-同构的. 由于(φ^L, V^L)可约，所以$(\varphi^{L'}, V^{L'})$可约，从而$((\varphi^{L'})^\Omega, (V^{L'})^\Omega)$可约. 由于

$$\begin{aligned}(V^{L'})^\Omega &\cong \Omega' \otimes_{L'} V^{L'} \cong \Omega' \otimes_{L'} (L' \otimes_F V) \\ &\cong (\Omega' \otimes_{L'} L') \otimes_F V \cong \Omega' \otimes_F V \cong V^\Omega,\end{aligned}$$

并且$(\varphi^{L'})^\Omega = \varphi^\Omega$，因此$(\varphi^\Omega, V^\Omega)$可约. 又由于$(\varphi^K)^\Omega = \varphi^\Omega$，$(V^K)^\Omega \cong V^\Omega$，所以$((\varphi^K)^\Omega, (V^K)^\Omega)$可约. 但是前面已指出$(\varphi^K, V^K)$是$G$的不可约$K$-表示，这与$K$是$G$的分裂域矛盾. 所以$F$是$G$的分裂域. ▌

定理 5.11.2 设G是有限群，域F的特征不能整除$|G|$，则存在F的有限扩域K使得K是G的分裂域.

证明 设$\overline{F}$是F的代数闭域，则$\overline{F}$是G的分裂域. 于是G有s个不等价的不可约$\overline{F}$-表示：$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_s$，其中$s$等于$G$的共轭类的数目. 把$\varphi_i$提供的矩阵表示记作$\Phi_i$，$1 \leqslant i \leqslant s$. 对一切$g \in G$，把$\Phi_i(g)$的所有元素$(1 \leqslant i \leqslant s)$添加到$F$上得到的$\overline{F}$的子域记作$K$，显然$K$是$F$的有限扩域. 任取$G$的一个不可约$\overline{F}$-表示，设它与某个$\varphi_j$等价，不难看出：它在适当一个基下提供的矩阵表示为$\Phi_j$，从而它可在$K$里写出. 据定理 5.11.1 立即得到：$K$是$G$的分裂域. ▌

设χ是群G的K-特征标，F是K的子域. 如果$\forall g \in G$，有$\chi(g) \in F$，则称χ**能在F里写出**. 此时χ可看成是G在F上的类函数.

定理 5.11.3 设G是有限群，K是G的分裂域并且K的特征为零，设F是K的一个子域. 如果G的每一个不可约K-特征标都能在F里写出并且它可看成是G的F-特征标，则F是G的分裂域.

证明 任取G的一个不可约K-表示φ，它提供的特征标记作χ. 由已知条件得，χ能在F里写出并且χ可看成是G的F-特征标，设χ是G的F-表示ψ提供的. 由于ψ^K与ψ在相应基下提供的矩阵表示在写法上相同，因此ψ^K提供的特征标就是χ. 由于

$\mathrm{char}K=0$，因此 $\psi^K\approx\varphi$. 从而 φ 能在 F 里写出. 从定理 5.11.1 得：F 是 G 的分裂域. ▌

上一节介绍的 Brauer 关于特征标的特征的定理(即，定理 5.10.2)可以用来证明下面的关于分裂域的一个定理：

定理 5.11.4 设 m 是有限群 G 的指数，如果域 F 的特征为零并且它包含本原 m 次单位根，则 F 是 G 的分裂域.

证明 设 $\bar{F}$ 是 F 的代数闭域，则 $\bar{F}$ 的特征为零并且它是 G 的所有子群的分裂域. 任取 G 的一个不可约 $\bar{F}$-特征标 χ，据命题 3.1.12 得：$\chi(g)$ 是 m 次单位根的和，$\forall\ g\in G$. 因此 χ 能在 F 里写出. 下面来证明 χ 可看成是 G 的 F-特征标. 据定理 5.10.2，χ 是 G 的初等子群的 1 次 $\bar{F}$-特征标的诱导特征标的整系数线性组合，即，$\chi=\sum\limits_{i=1}^{r}a_i\mu_i^G$，其中 μ_i 是 G 的某个初等子群 H_i 的 1 次 $\bar{F}$-特征标，$a_i\in\mathbf{Z}$，$1\leqslant i\leqslant r$. 仍据命题 3.1.12 可得：$\mu_i(h)$ 是 m 次单位根，$\forall\ h\in H_i$. 由于 1 次特征标可与 1 次表示等同，因此从 $\mu_i(h)\in F(\forall\ h\in H_i)$ 可以推出：μ_i 是 H_i 的 1 次 F-表示，亦即 1 次 F-特征标. 从而 μ_i^G 是 G 的 F-特征标. 设 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_s$ 是 G 的所有不同的不可约 F-特征标，则 μ_i^G 是 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_s$ 的非负整系数线性组合，$1\leqslant i\leqslant r$. 从而可写

$$\chi=\sum_{j=1}^{s}b_j\chi_j,\quad b_j\in\mathbf{Z}\ (1\leqslant j\leqslant s). \tag{1}$$

因为 $\bar{F}$ 是 G 的分裂域并且其特征为零，所以 $\langle\chi,\chi\rangle=1$. 由于 $\langle\chi,\chi\rangle=\frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G}\chi(g)\chi(g^{-1})$，并且 $\chi(g)\in F$，$\forall\ g\in G$，因此我们可以把 $\langle\chi,\chi\rangle$ 看成是 F^G 上的对称双线性函数值. 从而由(1)式得

$$1=\langle\chi,\chi\rangle=\left\langle\sum_{j=1}^{s}b_j\chi_j,\sum_{l=1}^{s}b_l\chi_l\right\rangle=\sum_j\sum_l b_jb_l\langle\chi_j,\chi_l\rangle. \tag{2}$$

据习题 3.2 的第 2 题得：$\langle\chi_j,\chi_l\rangle=\delta_{jl}d_j$，其中 $d_j=\dim_F D_j$，D_j 的意义如第三章 § 2 开头所述，$1\leqslant j\leqslant s$. 因此(2)式成为

$$1=\sum_{j=1}^{s}b_j^2d_j. \tag{3}$$

由此得出：存在某个 t 使得 $b_t=1$ 并且 $d_t=1$，而当 $j\neq t$ 时，有 $b_j=0$. 因此 $\chi=\chi_t$. 这证明了 χ 可看成是 G 的 F-特征标. 据定理 5.11.3 得到：F 是 G 的分裂域. ▌

设复数 ξ 是本原 n 次单位根，有理数域 $\boldsymbol{Q}$ 添加 ξ 得到的复数域 $\boldsymbol{C}$ 的子域称为 $\boldsymbol{Q}$ 上的 n 次**分圆域**，记作 $\boldsymbol{Q}(\xi)$.

推论 5.11.1 设有限群 G 的指数为 m，则 $\boldsymbol{Q}$ 上的 m 次分圆域是 G 的分裂域.

证明 由定理 5.11.4 立即得到. ▌

定理 5.11.4 中的条件"域 F 的特征为零"换成"域 F 的特征为素数 p"结论仍然成立. 为此先证明下面一个定理.

定理 5.11.5 设 G 是有限群，域 K 的特征为素数 p 并且 $p\nmid|G|$. 设 (φ,V) 是 G 的绝对不可约 K-表示，它提供的特征标记作 χ. 设 F 是 K 的子域使得 χ 能在 F 里写出. 则存在 G 的一个绝对不可约 F-表示 ψ 使得 $\varphi\approx\psi^K$.

证明 情形 1 设 K 是有限域. $F=K$ 是平凡的情形. 下面设 $F\subsetneqq K$. 如果 F 不是 K 的极大真子域，则存在 K 的子域 F_1 使得 $F\subsetneqq F_1\subsetneqq K$. 于是可取 F_1 为 K 的极大真子域. 如果 F 不是 F_1 的极大真子域，则存在 F_1 的极大真子域 F_2 使得 $F\subsetneqq F_2\subsetneqq F_1$. 由于 K 是有限域，所以只有有限多个 F_i 使得 $F\subsetneqq F_s\subsetneqq F_{s-1}\subsetneqq\cdots\subsetneqq F_1\subsetneqq K$，并且 F 是 F_s 的极大真子域，F_i 是 F_{i-1}的极大真子域($i=2,3,\cdots,s$)，F_1 是 K 的极大真子域. 如果能证明存在 G 的一个绝对不可约 F_1-表示 ψ_1 使得 $\varphi\approx\psi_1^K$，则 ψ_1^K 提供的特征标也是 χ，从而 ψ_1 提供的特征标与 χ 在写法上相同，因此它能在 F_2 里写出. 于是，同理可得：存在 G 的一个绝对不可约 F_2-表示 ψ_2 使得 $\psi_1\approx\psi_2^{F_1}$. 从而 $\psi_1^K\approx(\psi_2^{F_1})^K=\psi_2^K$，因此 $\varphi\approx\psi_2^K$. 由此看出我们只要对 F 是 K 的极大真子域的情形来证明，便可得出定理 5.11.5 对于 K 是有限域时成立. 下面设 F 是 K 的极大真子域.

因为 V 是绝对不可约左 $K[G]$-模，据定理 4.3.1 得

$$\mathrm{Hom}_{K[G]}(V,V)\cong K. \tag{4}$$

令 $A=\left\{\sum_{g\in G}b_g\varphi(g)\mid b_g\in F,\forall\ g\in G\right\}$，易看出 A 是域 F 上的有限维代数，并且 A 的元素是域 K 上向量空间 V 的线性变换. 若 $a\in Z(A)$，则对任意 $g\in G$，有 $a\varphi(g)=\varphi(g)a$. 从而对任意 $\sum_{g\in G}k_g g\in K[G]$，任意 $v\in V$，有

$$
\begin{aligned}
a\left(\left(\sum k_g g\right)v\right)&=a\left(\sum k_g(\varphi(g)v)\right)=\sum k_g a(\varphi(g)v)\\
&=\sum k_g(a\varphi(g))v=\sum k_g(\varphi(g)a)v\\
&=\sum k_g\varphi(g)(av)=\left(\sum k_g g\right)(av),
\end{aligned}
$$

由此得出：$a\in \mathrm{Hom}_{K[G]}(V,V)$. 因此 $Z(A)\subset \mathrm{Hom}_{K[G]}(V,V)$. 从(4)式得到：$F1_V\subseteq Z(A)\subseteq K1_V$. 于是 $Z(A)$ 是有限整环，从而 $Z(A)$ 必定是域. 因为 F 是 K 的极大真子域，所以或者 $Z(A)=F1_V$，或者 $Z(A)=K1_V$.

对于 $d\in K[G]$，令 $d_L: v\mapsto dv,\forall\ v\in V$. 令 $(K[G])_L=\{d_L\mid d\in K[G]\}$. 从定理 4.3.1 证明的第一、二段知，$(K[G])_L\cong M_n(\tilde{D})$，其中 $\tilde{D}=\mathrm{Hom}_{K[G]}(V,V)$，$n=\dim_{\tilde{D}}V$. 因为 V 是绝对不可约的，所以有(4)式. 从而 $\tilde{D}\cong K$，因此 $(K[G])_L\cong M_n(K)$，并且 $n=\dim_K V$.

假如 $Z(A)=K1_V$，则 $K1_V\subset A$，从而 $K[A]=A$. 显然，$K[A]=\left\{\sum_{g\in G}k_g\varphi(g)\mid k_g\in K,\forall\ g\in G\right\}$. 由于

$$
\begin{aligned}
\left(\sum k_g g\right)_L v&=\left(\sum k_g g\right)v=\sum k_g(\varphi(g)v)\\
&=\left(\sum k_g\varphi(g)\right)v,\quad \forall\ v\in V,
\end{aligned}
$$

所以 $\left(\sum k_g g\right)_L=\sum k_g\varphi(g)$. 从而 $(K[G])_L=K[A]$，于是 $K[A]\cong M_n(K)$. 从 $A=K[A]$ 得到 $A\cong M_n(K)$，于是 $A=\mathrm{Hom}_K(V,V)$. 由此得到：对于 $\alpha\in K\backslash F$，存在 $a=\sum b_g\varphi(g)\in A$ 使得 $\mathrm{tr}(a)=\alpha$. 另一方面，$\mathrm{tr}(a)=\mathrm{tr}\left(\sum b_g\varphi(g)\right)=\sum b_g\mathrm{tr}(\varphi(g))=\sum b_g\chi(g)\in F$，矛盾. 因此 $Z(A)=F1_V$.

下面我们来进一步研究 A 的结构.

假如 J 是 A 的幂零双边理想，则 $K[J]$是 $K[A]$的幂零双边理想. 由于 $K[A]=(K[G])_L\cong M_n(K)$，而 $M_n(K)$的双边理想只有 0 和 $M_n(K)$，所以 $K[J]=0$，从而 $J=0$. 因此 $\text{rad}A=0$. 这说明 A 是半单的. 据定理 2.2.3 知，A 是它的极小双边理想 $A_1,A_2,\cdots,A_s$ 的直和. 从定理 2.3.4 证明的第一段可以知道：$\dim_F Z(A)\geqslant s$. 因为 $Z(A)\cong F1_V$，所以 $s=1$. 这说明 A 是单代数. 设 I 是 A 的极小左理想，令 $D=\text{Hom}_A(I,I)$，则 D 是除环. 据定理 2.2.4 (Wedderburn) 得：$A\cong \text{Hom}_D(I,I)$，并且 $\dim_F I=(\dim_F D)\cdot(\dim_D I)$. 由于 $\dim_F I<\dim_F A<\infty$，所以 $\dim_F D<\infty$. 又由于 $|F|<\infty$，因此 $|D|<\infty$. 于是 D 为域. 对于 $a\in A$，令 a_L: $x\mapsto ax,\forall x\in I$. 记 $A_L=\{a_L|a\in A\}$. 据定理 4.3.1 证明的第一、二段知，$A_L\subset \text{Hom}_F(I,I)$，并且 $A_L\cong \text{Hom}_D(I,I)$. 于是 $A_L\cong A$. 对于 $d\in D$，任取 $a_L\in A_L$，任取 $x\in I$，有

$$(da_L)x=d(a_Lx)=d(ax)=a(dx)=a_L(dx)=(a_Ld)x,$$

因此 $da_L=a_Ld$. 从而 $d\in Z(A_L)$，于是 $D\subset Z(A_L)\cong Z(A)\cong F$. 由此得出 $\dim_F D=1$，所以 $D\cong F$. 从而得到 F-代数同构：$A\cong \text{Hom}_F(I,I)$. 于是 $A_L=\text{Hom}_F(I,I)$. 从定理 2.2.4 的证明过程知道 A 到 $\text{Hom}_F(I,I)$的同构映射 σ 是 $a\mapsto a_L$.

群 G 的 K-表示(φ,V) 可扩充成群代数 $K[G]$ 的表示，仍记作 φ，即 $\varphi\left(\sum k_g g\right)=\sum k_g\varphi(g)$. 由此诱导出 $F[G]$到 A 的代数同态：$\sum b_g g\to\sum b_g\varphi(g)$，把这个同态仍记作 φ. 于是我们可得群代数 $F[G]$ 的一个 F-表示 $\psi=\sigma\varphi$，其表示空间为 I. ψ 在 G 上的限制是 G 的一个 F-表示，仍记作 ψ. 由于 I 是 A 的极小左理想，所以 I 是不可约左 A-模. 不难看出 I 作为左 $F[G]$-模也是不可约的，因此 ψ 是 G 的不可约 F-表示. 易直接验证 $\text{Hom}_{F[G]}(I,I)\subset \text{Hom}_A(I,I)=D\cong F$. 由于 I 是不可约左 $F[G]$-模，所以 $\text{Hom}_{F[G]}(I,I)$ 是除环. 又由上式便得出 $\text{Hom}_{F[G]}(I,I)$ 是域. 又由于 $F1_I\subset \text{Hom}_{F[G]}(I,I)$，所以 $\text{Hom}_{F[G]}(I,I)\cong F$. 由定理 4.3.1 即得：$I$ 是绝对不可约的. 因

此 ψ 是绝对不可约的.

现在来证 $\psi^K\approx\varphi$. 设(η,U)是 G 的不可约 F-表示使得 φ 在 η^K 中的重数大于零. 假设 $\eta\not\approx\psi$. 因为 $\mathrm{char}F\nmid|G|$，所以 $F[G]$是半单的. 设 $F[G]$的直和分解式中不同构的极小左理想的代表系是$\{J_1, J_2,\cdots,J_r\}$. 因为 I,U 都是不可约左 $F[G]$-模，所以不妨设 $I\cong J_1$, $U\cong J_2$，其同构映射分别记作 f_1,f_2. 据引理 2.2.5 知，存在 $e\in J_1$ 使得 $J_1=J_1e$；并且 $J_1J_2=0$. 取 $b\in J_1$ 使得 $be\neq 0$. 取 $x_0\in I$ 使得 $f_1(x_0)=e$. 设左 $F[G]$-模 J_i 得到的 $F[G]$的表示为 $\psi_i(i=1,2,\cdots,r)$. 因为 $\psi\approx\psi_1$，所以

$$\begin{aligned}\psi(b)x_0 &= (f_1^{-1}\psi_1(b)f_1)x_0 = f_1^{-1}(\psi_1(b)f_1(x_0))\\ &= f_1^{-1}(\psi_1(b)e) = f_1^{-1}(be)\neq 0,\end{aligned}$$

由此得出 $\psi(b)\neq 0$. 因为 $\eta\approx\psi_2$，所以对一切 $y\in U$ 有

$$\begin{aligned}\eta(b)y &= (f_2^{-1}\psi_2(b)f_2)y = f_2^{-1}(\psi_2(b)(f_2(y)))\\ &= f_2^{-1}(b(f_2(y))) = f_2^{-1}(0) = 0,\end{aligned}$$

由此得出 $\eta(b)=0$. 因为 η^K 与 η 的矩阵表示在写法上一样，所以 $\eta^K(b)=0$. 因为 φ 在 η^K 中的重数大于零，所以 $\varphi(b)=0$. 于是 $\psi(b)=\sigma\varphi(b)=\sigma(0)=0$，矛盾. 因此 $\eta\approx\psi$. 于是 φ 在 ψ^K 中的重数大于零. 由于 ψ^K 不可约，所以 $\psi^K\approx\varphi$.

情形 2 设 K 是无限域. 设 $\overline{K}$ 是 K 的代数闭域. 因为 φ 绝对不可约，所以 $\varphi^{\overline{K}}$ 是 G 的不可约 $\overline{K}$-表示. 由于 $\varphi^{\overline{K}}$ 与 φ 的矩阵表示在写法上一致，所以 $\varphi^{\overline{K}}$ 的特征标亦为 χ. 如果能证存在 G 的绝对不可约 F-表示 ψ 使得 $\psi^{\overline{K}}\approx\varphi^{\overline{K}}$，则可得出 $\psi^K\approx\varphi$(这是因为 ψ^K 与 $(\psi^K)^{\overline{K}}=\psi^{\overline{K}}$ 的矩阵表示在写法上一致，并且 φ 与 $\varphi^{\overline{K}}$ 的矩阵表示在写法上一致). 因此我们不妨设 K 是代数闭域. K 的素域记作 F_p. 据定理 5.11.2 得，存在 F_p 的有限扩域 L 使得 L 是 G 的分裂域，并且 $L\subset K$. 因为 L 是分裂域并且它的特征 p 不能整除 $|G|$，所以 G 的不同构的不可约 L-表示的数目等于 G 的共轭类数目. 把它们的基域扩张到 K，便得到 G 的不可约 K-表示. 由于 G 的不同构的不可约 K-表示的数目也等于 G 的共轭类数目，因此上述得到的

就是 G 的全部不同构的不可约 K-表示. 于是存在 G 的不可约 L-表示 ξ 使得 $\xi^K\approx\varphi$. 从而 ξ^K 的特征标亦为 χ. 由于 ξ 与 ξ^K 的特征标在写法上相同，所以 ξ 的特征标可在 $L\cap F$ 里写出. 由于 L 是有限域，根据情形 1 证得的结论得到：存在 G 的绝对不可约 $(L\cap F)$-表示 ψ 使得 $\xi\approx\psi^L$. 于是 $\xi^K\approx(\psi^L)^K=\psi^K$，从而 $\varphi\approx\psi^K$. 因为 $(\psi^F)^K=\psi^K$，所以 $\varphi\approx(\psi^F)^K$. 显然，ψ^F 是 G 的绝对不可约 F-表示. ▌

定理 5.11.6 设 m 是有限群 G 的指数，如果域 F 的特征为素数 p 并且它包含本原 m 次单位根，则 F 是 G 的分裂域.

证明 在第一章 §5 的定理 1.5.1 后面我们已指出：如果域 F 包含本原 m 次单位根，其中 m 是有限群 G 的指数，则 F 的特征一定不能整除 $|G|$.

设 $\overline{F}$ 是 F 的代数闭域. 任取 G 的一个不可约 $\overline{F}$-表示 φ，它提供的特征标记作 χ. 据命题 3.1.12 知，$\chi(g)$是 m 次单位根的和，$\forall\ g\in G$. 因此 χ 能在 F 里写出. 据定理 5.11.5 得，存在 G 的一个绝对不可约 F-表示 ψ 使得 $\varphi\approx\psi^{\overline{F}}$. 据命题 5.11.1 得，$\varphi$能在 F 里写出. 由定理 5.11.1 立即得出：F 是 G 的分裂域. ▌

综合定理 5.11.4 和定理 5.11.6 得到：若有限群 G 的指数为 m，则任一包含本原 m 次单位根的域都是 G 的分裂域.

*§12 有理特征标

群 G 的 $\boldsymbol{Q}$-表示称为**有理表示**，它提供的特征标称为**有理特征标**. 若 χ 是有限群 G 的有理特征标，则 $\chi(g)\in\mathbf{Z}$ 对于每个 $g\in G$，这是因为 $\chi(g)$是$|G|$次单位根的和，从而是代数整数. 设 $H<G$，则$(1_H)^G$ 是 G 的有理特征标. 反之，G 的每一个有理特征标能否由 G 的某些子群的主特征标诱导出？Artin 的有理特征标定理回答了这个问题. 为了证明 Artin 定理，我们需要一个引理：

引理 5.12.1 设 χ 是 G 的有理特征标，设 G 的两个循环子群 $\langle x\rangle$与$\langle y\rangle$在 G 中共轭，则 $\chi(x)=\chi(y)$.

证明 因为 χ 是 G 上的类函数，所以不妨设 $\langle x\rangle=\langle y\rangle$. 设 x 的阶为 n，ε 是本原 n 次单位根. 因为 $\langle y\rangle=\langle x\rangle$，所以 $y=x^m$，其中 $(m,n)=1$. 于是 ε^m 也是本原 n 次单位根. 从而存在分圆域 $\boldsymbol{Q}(\varepsilon)$ 的 $\boldsymbol{Q}$-自同构 σ 使得 $\sigma(\varepsilon)=\varepsilon^m$. 据命题 3.1.12 知，$\chi(x)=\sum\limits_{i=1}^{\chi(1)}\varepsilon_i$，其中每个 ε_i 是 n 次单位根，从而它是 ε 的方幂. 我们有

$$\chi(y)=\chi(x^m)=\sum_i\varepsilon_i^m=\sum_i\sigma(\varepsilon_i)$$
$$=\sigma\Big(\sum_i\varepsilon_i\Big)=\sigma(\chi(x))=\chi(x). \quad \blacksquare$$

定理 5.12.1(Artin) 设 χ 是有限群 G 的有理特征标，则

$$\chi=\sum\frac{a_H}{[N_G(H):H]}(1_H)^G, \tag{1}$$

其中 H 跑遍 G 的循环子群，并且 $a_H\in\boldsymbol{Z}$.

证明 在 G 上定义一个等价关系 $\equiv$：

$$x\equiv y\Longleftrightarrow\langle x\rangle \text{ 与 } \langle y\rangle \text{ 在 } G \text{ 中共轭}.$$

从引理 5.12.1 得出：χ 在关于 $\equiv$ 的等价类上取常数值. 设 $B_1,B_2,\cdots,B_m$ 是 G 的关于 $\equiv$ 的不同的等价类（今后简称为 $(\equiv)$-类），并且设 f_i 是 B_i 的特征函数，即

$$f_i(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\in B_i,\\ 0, & \text{当 } x\notin B_i.\end{cases}$$

易看出 χ 是 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 的 $\boldsymbol{Z}$-线性组合. 在 B_i 里选一个代表元 x_i 并且设 $H_i=\langle x_i\rangle$，$n_i=|H_i|\,(i=1,2,\cdots,m)$. 由于 H_i 在 G 中的共轭子群的数目等于 $[G:N_G(H_i)]$，因此我们得到

$$|B_i|=[G:N_G(H_i)]\varphi(n_i), \tag{2}$$

这里 $\varphi(n_i)$ 是欧拉函数.

下面我们在 n_i 上运用归纳法来证明

$$|N_G(H_i)|f_i=\sum_{j=1}^{m}a_jn_j(1_{H_j})^G, \tag{3}$$

对于适当的 $a_j\in\boldsymbol{Z}$，其中当 H_j 不与 H_i 的子群共轭时有 $a_j=0$.

如果 $n_i=1$，则 $B_i=\{1\}$，$H_i=\{1\}$，$[G:H_i]=|G|$. 据命题 5.1.2 的公式(9)可得：$(1_{H_i})^G(1)=|G|$，$(1_{H_i})^G(g)=0$ 对于一切 $g\neq1$. 因此 $(1_{H_i})^G=|G|f_i$. 由于 $H_i=\{1\}$ 的子群只有自己，因此与 H_i 的子群共轭的 H_j 只有 H_i 一个. 于是(3)式右边为 $a_i(1_{H_i})^G$，而左边为 $|G|f_i$，取 $a_i=1$，则(3)式成立.

假设 $n_i>1$. 因为 $(1_{H_i})^G$ 是 G 的有理特征标，所以 $(1_{H_i})^G$ 在 $(\equiv)$-类上取常数值. 从而可设

$$(1_{H_i})^G=\sum_{j=1}^{m}b_jf_j, \tag{4}$$

其中 $b_j\in\mathbf{Z}$，$j=1,2,\cdots,m$. 我们有

$$\begin{aligned}(f_j,f_k)_G&=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}f_j(g)\overline{f_k(g)}\\&=\frac{1}{|G|}\sum_{l=1}^{m}|B_l|f_j(x_l)\overline{f_k(x_l)}=\frac{|B_j|}{|G|}\delta_{jk}.\end{aligned} \tag{5}$$

如果 $y=gxg^{-1}$，则 $y\equiv x$. 由此看出 f_j 是 G 的类函数($j=1,2,\cdots,m$). 根据 Frobenius 互反律得到：$((1_{H_i})^G,f_j)_G=(1_{H_i},f_j|H_i)_{H_i}$. 由于(4)式和(5)式我们有

$$((1_{H_i})^G,f_j)_G=\Big(\sum_{k=1}^{m}b_kf_k,f_j\Big)_G=b_j\frac{|B_j|}{|G|}. \tag{6}$$

$f_j|H_i(x_i^s)=1$ 当且仅当 $x_i^s\in B_j$，即 $x_i^s\equiv x_j$. 由此看出：当 H_j 不与 H_i 的子群共轭时，有 $f_j|H_i=0$. 当 H_j 与 H_i 的一个子群 $\langle x_i^s\rangle$ 共轭时，有 $\langle x_j\rangle=g\langle x_i^s\rangle g^{-1}=\langle gx_i^sg^{-1}\rangle$，从而得到：$x_i^s=g^{-1}x_j^rg$ 对于某个 r. 于是

$$x_i^s\in B_j\Longleftrightarrow x_j^r\in B_j\Longleftrightarrow(r,n_j)=1.$$

所以此时 $f_j|H_i$ 在 H_i 的 $\varphi(n_j)$ 个元素上取值为 1，在其余元素上取值为 0. 由此得出 $(1_{H_i},f_j|H_i)_{H_i}=\dfrac{\varphi(n_j)}{n_i}$. 再由(6)式和(2)式便得到

$$b_j=\frac{|G|}{|B_j|}(1_{H_i},f_j|H_i)_{H_i}=\frac{|G|}{|B_j|}\cdot\frac{\varphi(n_j)}{n_i}=\frac{|N_G(H_j)|}{n_i}. \tag{7}$$

因此，当 H_j 与 H_i 的一个子群共轭时，b_j 的值由(7)式给出；而当 H_j 不与 H_i 的子群共轭时，$b_j=0$. 所以

$$n_i(1_{H_i})^G=\sum_{j=1}^m n_i b_j f_j=\sum_l |N_G(H_l)|f_l, \tag{8}$$

其中 l 跑遍 H_l 的下标集而 H_l 与 H_i 的子群共轭. 由归纳假设，当 H_l 与 H_i 的真子群共轭时，有

$$|N_G(H_l)|f_l=\sum_{k=1}^m a_k n_k(1_{H_k})^G, \tag{9}$$

其中当 H_k 不与 H_l 的子群共轭时，$a_k=0$. 从(8)式解出 $|N_G(H_i)|f_i$，并且用(9)式代入便得出(3)式.

(3)式中的 $a_j\neq0$ 时，H_j 与 H_i 的某个子群 $\langle x_i^t\rangle$ 共轭，于是 H_j 与 $\langle x_i^t\rangle$ 处于 G 在其所有子群的集合上的共轭作用下的同一条轨道，从而 H_j 的稳定子群与 $\langle x_i^t\rangle$ 的稳定子群共轭，因此 $|N_G(H_j)|=|N_G(\langle x_i^t\rangle)|$. 又易看出 $N_G(H_i)\subset N_G(\langle x_i^t\rangle)$，所以 $|N_G(H_i)|\mid|N_G(H_j)|$. 设 $|N_G(H_j)|=|N_G(H_i)|c_{ij}$，从(3)式得

$$\begin{aligned}f_i&=\sum_{j=1}^m\frac{a_jn_j}{|N_G(H_i)|}(1_{H_j})^G=\sum_j\frac{c_{ij}a_jn_j}{|N_G(H_j)|}(1_{H_j})^G\\&=\sum_j\frac{c_{ij}'}{[N_G(H_j):H_j]}(1_{H_j})^G,\end{aligned}$$

当 H_j 不与 H_i 的子群共轭时，$c_{ij}'=0$；共轭时，$c_{ij}'=c_{ij}a_j$. 因为 χ 是 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 的 $\mathbf{Z}$-线性组合，所以我们便得到(1)式. ▌

推论 5.12.1 设 χ 是有限群 G 的任一有理特征标，则

$$\chi=\sum_H\frac{a_H}{|G|}(1_H)^G,$$

其中 H 跑遍 G 的循环子群，并且 $a_H\in\mathbf{Z}$. ▌

Artin 定理的一个引人注目的推论如下：

推论 5.12.2 有限群 G 的不等价的不可约有理表示的数目等于 G 的非共轭循环子群的数目.

证明 沿用定理 5.12.1 的记号，则 G 的非共轭循环子群的数目为(≡)-类的数目 m. 设 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_t$ 是 G 的不同的不可约有

理特征标. 因为 χ_i 在($\equiv$)-类上取常数值，所以 χ_i 完全被它在 x_1，$x_2,\cdots,x_m$ 上的函数值所决定. 显然，G 的所有($\equiv$)-类函数组成的集合 U 是 $\boldsymbol{Q}^G$ 的子空间，并且 $f\mapsto(f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_m))$ 是 U 到 $\boldsymbol{Q}^m$ 上的同构映射. B_j 的特征函数 $f_j\in U$，易看出 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 是线性无关的. 因为 χ_i 是 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 的 $\boldsymbol{Z}$-线性组合，所以向量组 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_t$ 的秩不超过 m. 据定理 3.3.3 知道，$\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_t$ 是线性无关的，由此得出 $t\leqslant m$.

另一方面，因为 $(1_{H_j})^G$ 是 G 的有理特征标，所以 $(1_{H_j})^G$ 是 χ_1，$\chi_2,\cdots,\chi_t$ 的非负整系数线性组合. 从(3)式得出：$|N_G(H_i)|f_i$ 是 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_t$ 的 $\boldsymbol{Z}$-线性组合，因此 $|N_G(H_1)|f_1,|N_G(H_2)|f_2,\cdots,|N_G(H_m)|f_m$ 的秩不超过 t. 从上述 U 到 $\boldsymbol{Q}^m$ 的同构映射易看出：$|N_G(H_1)|f_1,|N_G(H_2)|f_2,\cdots,|N_G(H_m)|f_m$ 线性无关，因此 $m\leqslant t$. 于是 $m=t$. ▌

习 题 5.12

1. 取复数域，设 H 是有限群 G 的子群，把 $(1_H)^G$ 记作 χ，证明：

(i) $\chi(1)\mid|G|$；

(ii) $(\chi,\xi)_G\leqslant\xi(1)$，其中 $\xi\in\mathrm{Irr}(G)$；

(iii) $(\chi,1_G)_G=1$；

(iv) $\chi(g)$ 是非负整数，$\forall\ g\in G$；

(v) $\chi(g)\leqslant\chi(g^m)$，$\forall\ g\in G,m\in\boldsymbol{Z}$；

(vi) $\chi(g)=0$ 当 g 的阶不能整除 $\dfrac{|G|}{\chi(1)}$；

(vii) 对于任意 $g\in G$，把 g 所在的共轭类记作 C，有 $\dfrac{\chi(g)|C|}{\chi(1)}$ 是整数.

(**提示**：G 在商集 G/H 上的左平移作用引起的传递置换表示是 $(1_H)^G$，由此可得(i)，(iii)，(iv)和(v)，注意利用命题 3.3.1 和推论 3.3.1. 关于(ii)，利用 Frobenius 互反律. 关于(vi)，注意 $|H|=$

$\frac{|G|}{\chi(1)}$，并且如果 g 的阶不能整除 $|H|$，则 g 的任一共轭元素都不属于 H，从而 $(1_H)^G(g)=0$. 关于(vii)，令 $S=\{(g_iH,x)\mid g_iH\in G/H, x\in C, x(g_iH)=g_iH\}$，用两种方法计算 $|S|$，注意 χ 是类函数，得到

$$\chi(g)|C| = \sum_{g_iH\in G/H}|G_{g_iH}\cap C|.$$

由于 G 在 G/H 上的作用是传递的，因此所有一点的稳定子群彼此共轭. 从而 $|G_{g_iH}\cap C|$ 不依赖于 g_iH 的选取，它是一个常数 m. 由此推出 $\chi(g)|C|=m[G:H]=m\chi(1)$.）

2. 取复数域，设 H 是有限群 G 的子群，η 是 H 的特征标，证明：

$$\mathrm{Ker}(\eta^G) = \bigcap_{x\in G} x(\mathrm{Ker}\eta)x^{-1}.$$

（**提示**：$g\in\mathrm{Ker}(\eta^G)$ 当且仅当 $\eta^G(g)=\eta^G(1)$. 因为 $\eta^G(g)=\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\dot{\eta}(x^{-1}gx)$，$\eta^G(1)=[G:H]\eta(1)$，所以 $g\in\mathrm{Ker}(\eta^G)$ 当且仅当 $\sum_{x\in G}\dot{\eta}(x^{-1}gx)=\sum_{x\in G}\eta(1)$. 因为 $|\dot{\eta}(x^{-1}gx)|\leqslant\eta(1)$，所以 $g\in\mathrm{Ker}(\eta^G)$ 当且仅当 $\dot{\eta}(x^{-1}gx)=\eta(1)$，$\forall\ x\in G$. 而这当且仅当 $x^{-1}gx\in\mathrm{Ker}\eta$，$\forall\ x\in G$.）

3. (L. Solomon) 证明：有限群 G 的复特征标表的每一行的行和是非负整数.

（**提示**：考虑群 G 在集合 G 上的共轭作用引起的置换表示 φ. $F(g)=\{x\in G\mid gxg^{-1}=x\}=C_G(g)$. 于是，$\chi_\varphi(g)=|F(g)|=|F(g^{-1})|=|C_G(g^{-1})|=|C_G(g)|$. 设 $\{g_1,g_2,\cdots,g_s\}$ 是 G 的共轭类的代表系. 任意 $\mu\in\mathrm{Irr}(G)$，有

$$\begin{aligned}(\chi_\varphi,\mu) &= \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{s}|C_i|\chi_\varphi(g_i^{-1})\mu(g_i)\\ &= \sum_{i=1}^{s}\frac{\chi_\varphi(g_i^{-1})}{|C_G(g_i)|}\mu(g_i) = \sum_{i=1}^{s}\mu(g_i).）\end{aligned}$$

注 有限群 G 的复特征标表的每一列的列和也是整数，但它

们可能是负的.

4. 设 χ 是有限群 G 的任一复特征标,证明:

$$|G|\chi = \sum a_\lambda \lambda^G,$$

其中 λ 跑遍 G 的循环子群的1次特征标的集合并且 $a_\lambda \in \mathbf{Z}$.

(提示:利用命题5.4.3)

§13 应用:Frobenius 群存在真正规子群的证明

本节将利用群的特征标理论证明著名的 Frobenius 群存在真正规子群的定理(用置换群的术语和抽象群的术语),这个定理至今还没有纯粹群论的证明,由此可见,群表示论对于研究群论所起的重要作用.

定义1 设 G 是 Ω 上的传递置换群,$|\Omega|=n$. 若 G 中每个非单位元至多有1个不动点,并且存在非单位元有1个不动点,则称 G 是 n 次 **Frobenius 群**. G 中的元素 g 若没有不动点,则称 g 为**正则元**;若 g 恰有1个不动点,则称 g 为**非正则元**.

定义2 群 G 的子群 H 称为 G 的**特征子群**,如果对于 G 的每一个自同构 σ 都有 $\sigma(H)\subset H$.

定理5.13.1(Frobenius) 设 G 是 n 次 Frobenius 群,则 G 中所有正则元和单位元组成的子集 N 是 G 的特征子群,并且它的阶为 n.

证明 由于 G 中存在非单位元恰有1个不动点,设此不动点为 j,则 j 的稳定子群 $G_j\neq\{1\}$. 由于 G 在 Ω 上传递,所以对一切 $i\in\Omega$,有 $G_i\neq\{1\}$. 由于 G 是 Frobenius 群,因此 $G_i\cap G_l=\{1\}$,当 $i\neq l$. 设 $|G_1|=m$,则 $|G_i|=m$,$\forall\ i\in\Omega$. 于是

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} G_i\right| = (m-1)n+1.$$

因为 $|G|=|G_1|\cdot n=mn$,所以 G 的正则元的数目为

$$|G| - |\bigcup_{i=1}^{n} G_i| = mn - [(m-1)n+1] = n-1,$$

G 的非正则元的数目为$(m-1)n$.

记$H=G_1$. 任意$i\in\Omega, i\neq 1, i$ 在 H 中的稳定子群 $H_i=\{1\}$, 从而 i 的 H-轨道长为$|H|=m$. 由于 H 可看成是 $\Omega\backslash\{1\}$上的置换群,从而 $\Omega\backslash\{1\}$是一些 H-轨道的并集. 由此得出 $m|(n-1)$. 因此 $(m,n)=1$.

因为G是Ω上的置换群,所以G在复数域上有一个n次置换表示φ. 我们知道 $\chi_\varphi(g)=|F(g)|$,其中$|F(g)|$是 g 的不动点数目. 于是 $\chi_\varphi(1)=n$;当 g 是正则元时,$\chi_\varphi(g)=0$;当 g 是非正则元时,$\chi_\varphi(g)=1$. 设 χ_1是 G 的主特征标. 因为 G 在 Ω 上传递,所以 $(\chi_\varphi,\chi_1)=1$. 从而 $\varphi\approx 1_G\oplus\psi$,其中 ψ 是 G 的 $n-1$次复表示. 于是当 g 为正则元时,$\chi_\psi(g)=-1$;当 g 为非正则元时,$\chi_\psi(g)=0$. 考虑 G 上一个函数 ξ,它由下式定义:

$$\xi(g) = \chi_\rho(g) - m\chi_\psi(g), \quad \forall\, g\in G, \tag{1}$$

其中 ρ 是 G 的正则表示. 由(1)式得

$$\xi(1) = \chi_\rho(1) - m\chi_\psi(1) = |G| - m(n-1) = m;$$

当 g 为正则元时,$\xi(g)=m$;当 g 为非正则元时,$\xi(g)=0$. 显然 $\xi\in\mathrm{char}(G)$. 如果能证明 ξ 是 G 的特征标,则

$$\mathrm{Ker}\xi = \{g\in G|\xi(g)=\xi(1)\} = N,$$

从而 $N\lhd G$. 任取 G 的一个自同构 σ,任意 $g\in N$,由于 g 的阶整除 $|N|=n$,因此 $\sigma(g)$的阶是 n 的因子. 由于 G 的任一非正则元必属于某个 G_i,而$|G_i|=m$,因此非正则元的阶是 m 的因子. 由于$(n,m)=1$,所以 $\sigma(g)$是正则元. 这表明 $\sigma(N)\subset N$,从而 N 是 G 的特征子群. 下面来证 ξ 是 G 的特征标.

设 $\mathrm{Irr}(H)=\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_r\}$,设 $\mu_i(1)=m_i, 1\leqslant i\leqslant r$. 用 μ_ρ 记 H 的正则表示 ρ_H 提供的特征标. 则

$$\mu_\rho = \sum_{i=1}^{r} m_i\mu_i, \quad m = \sum_{i=1}^{r} m_i^2.$$

因为$(\mu_\rho)^G=\chi_\rho$，所以$\chi_\rho = \sum_{i=1}^{r} m_i\mu_i^G$. 从而

$$\xi = \chi_\rho - m\chi_\psi = \sum_{i=1}^{r} m_i\mu_i^G - \left(\sum_{i=1}^{r} m_i^2\right)\chi_\psi$$

$$= \sum_{i=1}^{r} m_i(\mu_i^G - m_i\chi_\psi).$$

因此只要证：对于每一个$i(1\leqslant i\leqslant r)$，$\mu_i^G-m_i\chi_\psi$是$G$的特征标. 记$\pi_i=\mu_i^G-m_i\chi_\psi$.

因为$H=G_1$，并且$[G:H]=n$，从而可设H在G中的左陪集代表系是$g_1=1,g_2,\cdots,g_n$，其中$g_j(1)=j$, $2\leqslant j\leqslant n$. 任取G的正则元x，显然$g_j^{-1}xg_j$仍为正则元，从而

$$\mu_i^G(x) = \sum_{j=1}^{n} \dot{\mu}_i(g_j^{-1}xg_j) = 0.$$

任取G的非正则元y，设y的不动点是l，则$g_l^{-1}yg_l$的不动点是1，从而$g_l^{-1}yg_l\in H$；而$j\neq l$时，$g_j^{-1}yg_j$的不动点不是1，从而$g_j^{-1}yg_j\overline{\in} H$. 因此

$$\mu_i^G(y) = \sum_{j=1}^{n} \dot{\mu}_i(g_j^{-1}yg_j) = \mu_i(g_l^{-1}yg_l).$$

把$g_l^{-1}yg_l$简记作$\tilde{y}$，即，$\tilde{y}$是与y在G中共轭的元素，并且$\tilde{y}\in H$. 又有$\mu_i^G(1)=[G:H]\cdot m_i=nm_i$.

$$(\pi_i,\pi_i)_G = (\mu_i^G,\mu_i^G)_G - 2m_i(\mu_i^G,\chi_\psi)_G + m_i^2(\chi_\psi,\chi_\psi)_G,$$

$$(\mu_i^G,\mu_i^G)_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mu_i^G(g)\,\overline{\mu_i^G(g)} = \frac{1}{|G|}\Big[n^2m_i^2 + \sum_{y\in G\setminus N}|\mu_i(\tilde{y})|^2\Big].$$

因为若$y\in G_l$，则$\tilde{y}=g_l^{-1}yg_l\in H$. 若$y_1,y_2\in G_l$，且$y_1\neq y_2$，则$g_l^{-1}y_1g_l\neq g_l^{-1}y_2g_l$. 从而当$y$跑遍$G_l$的每一个元素时，$\tilde{y}$跑遍$H$的每一个元素. 由于$G\setminus N=\bigcup_{l=1}^{n}(G_l\setminus\{1\})$，所以当$y$跑遍$G\setminus N$时，$\tilde{y}$便跑遍$H\setminus\{1\}$的每个元素$n$次，从而

$$(\mu_i^G,\mu_i^G) = \frac{1}{|G|}\Big[n^2m_i^2 + n\sum_{\substack{\tilde{y}\in H\\ \tilde{y}\neq 1}}|\mu_i(\tilde{y})|^2\Big]$$

$$= \frac{nm_i^2}{m} + \frac{1}{m}\sum_{\bar{y}\in H\setminus\{1\}} |\mu_i(\bar{y})|^2$$

$$= \frac{nm_i^2}{m} + \frac{1}{|H|}\Big[\sum_{\bar{y}\in H} |\mu_i(\bar{y})|^2 - \mu_i(1)^2\Big]$$

$$= \frac{nm_i^2}{m} + (\mu_i,\mu_i)_H - \frac{m_i^2}{m} = \frac{(n-1)m_i^2}{m} + 1.$$

$$(\chi_\psi,\chi_\psi)_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |\chi_\psi(g)|^2$$

$$= \frac{1}{nm}[(n-1)^2 + (n-1)(-1)^2] = \frac{n-1}{m}.$$

$$(\mu_i^G,\chi_\psi)_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mu_i^G(g)\,\overline{\chi_\psi(g)}$$

$$= \frac{1}{nm}[nm_i(n-1) + 0] = \frac{(n-1)m_i}{m}.$$

所以

$$(\pi_i,\pi_i)_G = \frac{(n-1)m_i^2}{m} + 1 - 2m_i\frac{(n-1)m_i}{m} + m_i^2\frac{n-1}{m} = 1.$$

设 $\pi_i = \sum_{j=1}^{s} b_j\chi_j$，其中 b_j 是整数（$1\leqslant j\leqslant s$），$\{\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_s\} = \mathrm{Irr}(G)$. 于是 $1 = (\pi_i,\pi_i)_G = \sum_{j=1}^{s} b_j^2$. 由此推出有唯一的 k 使得 $b_k = \pm 1$，而其余的 $b_j = 0$. 因此 $\pi_i = \chi_k$ 或 $\pi_i = -\chi_k$. 由于

$$\pi_i(1) = \mu_i^G(1) - m_i\chi_\psi(1) = nm_i - m_i(n-1) = m_i > 0,$$

所以 $\pi_i = \chi_k$. 从而得到 ξ 是 G 的特征标. ▌

定理5.13.1是用置换群的术语叙述的 Frobenius 群存在正规子群的定理，我们从它可以得到用抽象群的术语叙述的等价的定理.

定理5.13.2（Frobenius） 设 G 是有限群，$H<G$，并且对于 $g\in G\setminus H$，有 $H\cap gHg^{-1}=\{1\}$，则存在 G 的一个正规子群 N 使得 $H\cap N=\{1\}$，并且 $HN=G$，从而 G 是 H 与 N 的半直积.

证明 若 $H=\{1\}$，则取 $N=G$ 即可. 若 $H=G$，则取 $N=\{1\}$

即可. 下面设 $H\neq\{1\}$ 并且 $H\neq G$. 设 $\{g_1=1,g_2,\cdots,g_n\}$ 是 H 在 G 中的左陪集代表系. 群 G 在商集 G/H 上的左平移作用是传递的. 由于

$$x(g_iH)=g_iH\Longleftrightarrow g_i^{-1}xg_i\in H\Longleftrightarrow x\in g_iHg_i^{-1},$$

因此这个作用的核等于 $\bigcap_{i=1}^{n}g_iHg_i^{-1}$. 由已知条件得, 这个作用是忠实的. 因此 G 可以看成是集合 G/H 上的置换群.

令 $S=\bigcup_{i=1}^{n}g_iHg_i^{-1}$. 设 x 是 G 的非单位元, 由于 g_iH 是 x 的不动点当且仅当 $x\in g_iHg_i^{-1}$, 因此 x 是正则元当且仅当 $x\in G\backslash S$.

假如 G 的非单位元 x 有两个不动点 g_iH 和 g_jH, 则 $x\in g_iHg_i^{-1}\cap g_jHg_j^{-1}$. 从而存在 $h_1,h_2\in H\backslash\{1\}$ 使得 $g_ih_1g_i^{-1}=g_jh_2g_j^{-1}$. 由此得到 $h_1=(g_i^{-1}g_j)h_2(g_i^{-1}g_j)^{-1}$. 由于 $g_iH\neq g_jH$, 所以 $g_i^{-1}g_j\overline{\in}H$. 于是得到 $H\cap(g_i^{-1}g_j)H(g_i^{-1}g_j)^{-1}\neq\{1\}$, 矛盾. 因此 G 的非单位元至多有一个不动点. 由于 $g_iHg_i^{-1}\neq\{1\}$, 所以存在非单位元 $x\in g_iHg_i^{-1}$, 它以 g_iH 为不动点. 因此 G 是 n 次 Frobenius 群. 据定理5.13.1知, G 的所有正则元和单位元组成的集合 N 是 G 的特征子群, 且 $|N|=n$. 从上一段知, $N=\{1\}\cup(G\backslash S)$. 设 $|H|=m$, 则 $|G|=[G:H]|H|=nm$. 由于 H 是"点"g_1H 在 G 中的稳定子群, 所以 $H\cap N=\{1\}$. 从而 $|HN|=mn=|G|$, 因此 $G=HN$. ∎

定义3 设 H 是群 G 的子群, 并且 $\{1\}<H<G$. 如果对于每一个 $g\in G\backslash H$, 有 $H\cap gHg^{-1}=\{1\}$, 则称 H 是 G 里的 **Frobenius 补**. 群 G 如果包含一个 Frobenius 补, 则称 G 是 **Frobenius 群**.

定理5.13.2说明: Frobenius 群 G 一定存在一个正规子群 N, 使得 G 是 Frobenius 补 H 与 N 的半直积. 这个正规子群 N 称为 G 的 **Frobenius 核**. N 是被 H 唯一决定的(假如 $M\lhd G$ 具有性质 $M\cap H=\{1\}$, 则得 $M\cap gHg^{-1}=\{1\}$, $\forall\, g\in G$. 由于 $N=\{1\}\cup(G-\bigcup_{g\in G}gHg^{-1})$, 因此 $M\subset N$).

*§ 14　应用：360阶单群同构于 A_6 的证明

本节首先给出一个结果，它常用于找出一个群的真子群.

定理5.14.1（**Brauer**）　设 χ 是有限群 G 的一个复特征标使得 $(\chi,1_G)_G=0$. 设 A,B 是 G 的子群并且假设

$$(\chi|A,1_A)_A+(\chi|B,1_B)_B>(\chi|A\cap B,1_{A\cap B})_{A\cap B},$$

则 A 和 B 生成 G 的一个真子群.

证明　设 (φ,V) 是 G 的复表示，它提供的特征标为 χ. 令

$$U:=\{\alpha\in V\,|\,\varphi(a)\alpha=\alpha,\forall\, a\in A\},$$
$$W:=\{\beta\in V\,|\,\varphi(b)\beta=\beta,\forall\, b\in B\},$$
$$Y:=\{\gamma\in V\,|\,\varphi(c)\gamma=\gamma,\forall\, c\in A\cap B\}.$$

显然 U,W,Y 都是 V 的子空间，并且易看出 U 是 A 不变子空间，W 是 B 不变子空间，Y 是 $A\cap B$ 不变子空间. 由于对于任意 $a\in A$，$\varphi(a)$ 是 U 的恒等变换，所以

$$\dim U=(\chi|A,1_A)_A.$$

同理有 $\dim W=(\chi|B,1_B)_B$，$\dim Y=(\chi|A\cap B,1_{A\cap B})_{A\cap B}$.

由已知条件得

$$\dim U+\dim W>\dim Y. \tag{1}$$

由于 $U\subset Y$ 并且 $W\subset Y$，所以 $U+W\subset Y$，从而

$$\dim(U+W)\leqslant\dim Y. \tag{2}$$

从(1)和(2)式得出：$\dim(U\cap W)>0$，因此 $U\cap W\neq 0$. 显然，$U\cap W$ 是 $\langle A,B\rangle$ 的不动点组成的子空间，并且同上理有：$\dim(U\cap W)=(\chi|\langle A,B\rangle,1_{\langle A,B\rangle})$. 假如 $\langle A,B\rangle=G$，则得：$\dim$ $\cap W)=(\chi,1_G)=0$，矛盾. 因此 $\langle A,B\rangle\neq G$. ▌

下面我们来证明交错群 A_6 是唯一的360阶单群.

定理5.14.2　设 G 是360阶单群，则 $G\cong A_6$.

证明　假设 G_0 是 G 的指数为 $k>1$ 的子群，G 在商集 G/G_0 上的左平移作用引起了 G 到对称群 S_k 的一个群同态 f. 由于 G 是单

群，所以 $\mathrm{Ker}f=\{1\}$ 或 $\mathrm{Ker}f=G$. 由于 $k>1$，所以 $\mathrm{Ker}f\neq G$. 从而这个作用是忠实的，即 G 同构于 S_k 的一个子群 H. 假如 H 含奇置换，则 H 有一个1次复表示(偶置换映到1，奇置换映到 -1)，它的核是 H 的非平凡正规子群，这与 H 是单群矛盾. 因此 G 同构于交错群 A_k 的一个子群 H. 由于 $|G|=360$，因此 $k\geqslant 6$. 于是如果我们能找到 G 的一个指数为6的子群 G_0，则 $G\cong A_6$.

因为 $360=2^3\cdot 3^2\cdot 5$，所以 G 的 Sylow 3-子群的数目 r 只可能是1，4，10或40. 因为 G 是单群，所以 $r\neq 1$. 假如 $r=4$，则 G 在4个 Sylow 3-子群组成的集合上有一个共轭作用，从而 G 到 S_4 有一个同态，由于 G 是单群，此同态的核或为$\{1\}$或为 G，这些均不可能. 因此 $r\neq 4$. 设 P 是 G 的一个 Sylow 3-子群，记 $N=N_G(P)$. 因为 P 在 G 中的共轭子群的数目等于$[G:N_G(P)]$，所以$[G:N]=10$或$[G:N]=40$. 由于 G 是单群，因此 G 没有指数为$|P|$的正规子群. 根据 Burnside 的转移定理："若有限群 G 的 Sylow 子群 P 在它的正规化子的中心内，则 G 有一个正规子群其指数为$|P|$"，便得出 $P\not\subset Z(N)$. 由此推出 $N\neq P$(否则，$P=Z(P)=Z(N)$). 因此 $[G:N]=10$.

现在假设 M 是 G 的真子群并且包含 P，我们断言 $M\subset N$. 假如 $M\not\subset N$，则 $M\cap N\neq M$，从而$[M:M\cap N]>1$. 因为 G 是单群，所以$[G:M]>2$. 于是从$40=[G:P]=[G:M][M:P]$可推出$[M:P]\leqslant 10$. 因为 $P\subset M\cap N$，所以$[M:N\cap N]\leqslant[M:P]\leqslant 10$. 显然，$M\cap N=M\cap N_G(P)=N_M(P)$. 于是$[M:M\cap N]$等于 P 在 M 里的共轭子群的数目，而这等于 M 的 Sylow 3-子群的数目 r'. 设$|M|=9\cdot 2^i\cdot 5^j$，$0\leqslant i\leqslant 3$，$0\leqslant j\leqslant 1$，$2^i5^j<40$，根据 Sylow 定理得，$r'=1$或4或10. 假如 $r'=1$，则 $P\lhd M$，从而 $M\subset N$，矛盾. 假如 $r'=10$，则从 $r'\mid[M:P]$推出$|M|\geqslant 90$. 由于 G 是单群，据本定理证明的第一段知，G 没有指数小于6的子群. 从$|M|\geqslant 90$知$[G:M]\leqslant 4$，矛盾. 因此 $r'=4$. 即，$[M:M\cap N]=4$. 从而得到$[G:M][M\cap N:P]=10$. 因为$[G:M]\geqslant 6$，所以$[G:M]=10$. 于是 $M\cap N=P$，即 $N_M(P)=P$. 从

而 $P=Z(P)=Z(N_M(P))$. 据 Burnside 的转移定理得,M 有一个指数为9的正规子群 K. 由于 $|M|=36$,因此 $|K|=4$. 从而 K 含于 G 的某一个 Sylow 2-子群内并且在其中正规,因此这个 Sylow 2-子群含于 $N_G(K)$. 由此推出 $8|N_G(K)$. 由于 $K<M$ 并且 $P\subset M$,因此对于任意 $x\in P$ 有 $xKx^{-1}=K$,这说明 $P\subset N_G(K)$. 于是 $|N_G(K)|\geqslant 8\cdot 9=72$,从而 $[G:N_G(K)]\leqslant 5$,矛盾. 所以 $M\subset N$.

现在设 P_1 是 G 的另外一个 Sylow 3-子群,令 $D=P\cap P_1$. 则 $P_1\subset N_G(D)$(因为 P_1 是9阶 abel 群,所以对于任意 $x\in P_1$,任意 $a\in D$,有 $xax^{-1}=a$,从而 $xDx^{-1}=D$). 于是 $N_G(D)\not\subset N$(否则,$P_1\subset N$,这与 $P\lhd N$ 矛盾). 同理有 $P\subset N_G(D)$. 据上一段证得的结果便推出 $N_G(D)=G$. 于是 $D\lhd G$. 由于 D 是单群,因此 $D=1$.

其次我们断言 G 没有6阶元. 考虑 G 在它的10个 Sylow 3-子群组成的集合 Ω 上的共轭作用,于是 G 到 S_{10} 有一个同态 σ. 显然 $\mathrm{Ker}\sigma\neq G$,因此 $\mathrm{Ker}\sigma=1$. 与第一段类似的论证可知 G 同构于 A_{10} 的一个子群. 假如 G 有6阶元 g,则它在 σ 下的像,记作 x,是 A_{10} 的一个6阶元. 于是 x 的轮换分解式中必定包含一个2-轮换(因为6-轮换是奇置换). 从而 x^2 至少有两个不动点. 因此 $g^2P_ig^{-2}=P_i$,$g^2P_jg^{-2}=P_j$,即 $g^2\in N_G(P_i)$,$g^2\in N_G(P_j)$. 因为 $|N_G(P_i)|=36$,所以3阶元 $g^2\in P_i$. 同理 $g^2\in P_j$. 这与 $P_i\cap P_j=1$ 矛盾. 所以 G 没有6阶元.

设 H 是 N 的 Sylow 2-子群,因为 $P\lhd N$,所以 N 是 P 与 H 的半直积. 任意 $h\in H$,h 诱导了 P 的一个自同构,即 $y\mapsto hyh^{-1}$,$\forall\, y\in P$. 假如 $h\neq 1$ 使得对一切 $y\in P$ 有 $hyh^{-1}=y$,则 h 与 y 可交换. 取 P 的一个3阶元 y,则 hy 的阶为6或12. 若为后者,则 $(hy)^2$ 的阶为6. 这些均与上一段所证的结果矛盾. 因此只有 H 的单位元素才诱导了 P 的恒等自同构. 从而 H 的元素共诱导了 P 的4个不同的自同构. 所以 $\mathrm{Aut}(P)$ 有一个4阶子群. 假如 P 是9阶循环群,则 $|\mathrm{Aut}(P)|=6$,它不可能有4阶子群. 因此 P 是9阶初等 abel 群. 设 $P=\langle a\rangle\times\langle b\rangle$. 设 h 是 N 的2阶元,假如 $hah^{-1}=b$,则 $(ha)^2=haha$

$=ba$，从而$(ha)^6=(ba)^3=1$，这表明ha是6阶元，矛盾．因此$hah^{-1}=a^2=a^{-1}$．这说明N的每一个2阶元诱导的P的自同构把P的每一个元素映成其逆元．假如H是初等abel群，则a在N里的共轭类只含a和a^2．另一方面，$C_N(a)=P$，从而a在N里的共轭类所含元素的数目等于$[N:C_N(a)]=4$．这个矛盾说明H应为4阶循环群．设$H=\langle h\rangle$．显然$hah^{-1}\neq a^i(i=1,2)$．不妨设$hah^{-1}=b$．任意$y\in P$且$y\neq 1$，$C_N(y)=P$，从而y在N里的共轭类含的元素数目为4．易看出，$\{1\}$，$\{a,b,a^2,b^2\}$，$\{ab,a^2b,a^2b^2,ab^2\}$是P中元素在N里的共轭类．因为$C_N(h)=H$，所以h在N中的共轭类含的元素数目为9．h^2，h^3也类似．从而N共分成6个共轭类，其代表元分别为：$1,a,ab,h,h^2,h^3$．因此N有6个不可约复特征标．因为$|N/P|=4$，所以$P\supset N'$．假如$|N'|=3$，则N有12个1次特征标，这不可能．因此$N'=P$．从而N有4个1次特征标．剩下的两个非1次特征标必定都是4次的(因为$1^2+1^2+1^2+1^2+4^2+4^2=36$)．

如果$\chi\in\mathrm{Irr}(G)$并且$\chi\neq 1_G$，则$\mathrm{Ker}\chi\neq G$．由于G是单群，所以$\mathrm{Ker}\chi=1$．从而$N'\not\subset\mathrm{Ker}\chi$．假如$\chi|N$不含$N$的任何一个4次不可约特征标，则易看出$N'\subset\mathrm{Ker}\chi$，矛盾．因此$\chi|N$一定包含某一个4次不可约特征标，从而$\chi(1)\geqslant 4$．

设$\chi\in\mathrm{Irr}(G)$并且$\chi(1)$是奇数．因为$4\nmid\chi(1)$，所以$\chi|N$包含N的一个1次特征标λ．于是$(\chi,\lambda^G)_G=(\chi|N,\lambda)_N>0$，即，$\chi$是$\lambda^G$的不可约成分．因此$\chi(1)\leqslant\lambda^G(1)=[G:N]=10$．据上一段知，如果$\chi\neq 1_G$，则$\chi(1)\geqslant 4$．又由于$\chi(1)\mid|G|$，所以$\chi(1)\neq 7$．因此$\chi(1)=5$或9．

我们将说明G有一个5次不可约特征标．因为

$$\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)}\chi(1)^2=360\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4),$$

所以G至少有三个奇次不可约特征标，它们不是主特征标．如果$\chi\in\mathrm{Irr}(G)$且$\chi(1)=9$，则据上一段知χ是λ^G的成分，其中λ是N的某个1次特征标．于是$\lambda^G=\chi+\mu$，其中μ是G的某个1次特征标．据

上两段知，G 的奇次的非主特征标的不可约特征标其次数不小于 4，因此 $\mu=1_G$. 因为 $(\lambda,1_N)_N=(\lambda^G,\mu)_G>0$，所以 $\lambda=1_N$，从而 χ 是 $(1_N)^G$ 的成分. 由于 $(1_N)^G(1)=[G:N]=10$，所以 $(1_N)^G$ 不可能含两个9次不可约成分. 从而 G 的9次不可约特征标至多有一个. 因此 G 一定有5次不可约特征标.

现在取定 G 的一个5次不可约特征标 χ，则 $\chi|N$ 包含 N 的一个1次特征标 λ. 因为 $P=N'$，所以 $\lambda|P=1_P$. 从而 $\chi|P$ 包含 1_P. 设 ν 是 $\chi|P$ 的1次成分且 $\nu\neq 1_P$. 因为 P 的任一元素 y 与其逆元处于 N 的同一个共轭类里，所以 $\chi(y)=\chi(y^{-1})=\overline{\chi(y)}$. 由此推出 $\chi(y)$ 是实数，即 $\chi|P$ 是实值函数. 由于 P 的1次非主特征标 ν 其函数值包含本原3次单位根 ω，因此从 $\chi|P$ 是实值函数可以推出 $(\chi|P,\nu)_P=(\chi|P,\nu^*)_P$，其中 ν^* 是 ν 的逆步特征标. 设 $U=\mathrm{Ker}\nu$. 由于 $P=\langle a\rangle\times\langle b\rangle$ 的复特征标表是 $\langle a\rangle$ 的复特征标表与 $\langle b\rangle$ 的复特征标表的 Kronecker 积，因此 $|U|=|\mathrm{Ker}\nu|=|\{y\in P\mid\nu(y)=1\}|=3$. 显然 $\mathrm{Ker}\nu^*=\mathrm{Ker}\nu=U$. 由于 $\chi|P$ 包含 1_P，并且 ν 和 ν^* 在 $\chi|P$ 中的重数相同，又 $\nu|U=\nu^*|U=1_U$，因此 $(\chi|U,1_U)_U\geqslant 3$. 对于任意 $g\in G$，直接计算可得 $(\chi|gUg^{-1},1_{gUg^{-1}})_{gUg^{-1}}=(\chi|U,1_U)_U$. 于是根据定理5.14.1可知，$U$ 的任意两个共轭子群生成 G 的一个真子群. 注意 U 是 P 的一个3阶子群. 由于 G 有10个 Sylow 3-子群，并且它们彼此共轭. 于是它们是 P 和 $g_iPg_i^{-1}(1\leqslant i\leqslant 9)$. 假如 $g_lUg_l^{-1}$ 与 $g_kUg_k^{-1}$ 彼此中心化，由于它们分别属于 $g_lPg_l^{-1}$ 和 $g_kPg_k^{-1}$，而前面已证任意两个 Sylow 3-子群的交为 $\{1\}$，所以 $g_lUg_l^{-1}\neq g_kUg_k^{-1}$，从而它们生成一个9阶子群，这个 Sylow 3-子群与 $g_lPg_l^{-1}$ 交于 $g_lUg_l^{-1}$，矛盾. 因此 U 和 $g_iUg_i^{-1}(1\leqslant i\leqslant 9)$ 两两不彼此中心化.

设 V 是 U 的共轭子群并且 $V\notin C_G(U)$. 设 $L=\langle U,V\rangle$，如果 $[G:L]=6$，则 $G\cong A_6$. 现在假设 $|L|<60$. 假如 L 含9阶子群，由于 $U\subset L$，因此 $P\subset L$. 据前面证得的结论知此时 $L\subset N$. 由于 $N=PH$，其中 H 是4阶循环群，所以 N 中任一3阶元必属于 P(可验证 ah,ah^2,ah^3 都不是3阶元，其中 $a\in P$，h 是 H 的生成元). 由此推出

$V\subseteq P$，从而 $V\in C_G(U)$，矛盾. 因此 U 和 V 都是 L 的 Sylow 3-子群. 由此得出3×4或3×10能整除$|L|$，从而$|L|=12,24$或30.

如果$|L|=30$，则 L 有10个 Sylow 3-子群，因而 L 只能有一个 Sylow 5-子群 S，于是 $S\lhd L$，从而 $L\subset N_G(S)$. 由此则得$[G:L]=[G:N_G(S)][N_G(S):L]$，即有$[G:N_G(S)]|12$. 据 Sylow 定理，$[G:N_G(S)]\equiv 1 \pmod 5$. 从而$[G:N_G(S)]=6$，由此得 $G\cong A_6$. 但是 A_6 有144个5阶元，因而 A_6 有36个 Sylow 5-子群，可是 G 只有6个 Sylow5-子群，矛盾. 因此$|L|\neq 30$.

如果$|L|=24$，则 L 有4个 Sylow 3-子群，从而 L 不可能有3个 Sylow 2-子群，因此 L 只有1个 Sylow 2-子群. 由于 L 的元素的阶只可能是1，2，3，4，6，8或12，而2阶元、4阶元、8阶元都只能在 L 的唯一的 Sylow 2-子群中，因此 L 必有6阶元，这与前面所证的结论"G 没有6阶元"矛盾. 因此$|L|\neq 24$.

由上述得$|L|=12$. 这时 L 有4个 Sylow 3-子群，从而 L 只有一个 Sylow 2-子群 K. 假如 $K=\langle c\rangle$，设 y 是 L 的3阶元，则 $yc^2y^{-1}\in K$. 由于 K 只有一个2阶元，因此 $yc^2y^{-1}=c^2$，从而 $yc^2=c^2y$，于是 yc^2的阶为6，矛盾. 这表明 K 是4阶初等 abel 群.

其次我们断言$(\chi|L,1_L)_L=2$. 理由如下：因为$|L/K|=3$，所以 $K\supseteq L'$. 假如$|L'|=2$，则 L 有6个1次复特征标，这时 $\sum\limits_{\mu\in \mathrm{Irr}(L)}\mu(1)^2\neq 12$，因此 $L'=K$. 从而 L 有3个1次特征标. 由此推出 L 只有一个非1次的特征标 θ，其次数为3. 因此 L 有4个共轭类. 设 $c\in K$，$y\in U$，由于 $ycy^{-1}\neq c$，因此 K 的3个2阶元在同一个共轭类里，这是实共轭类. 于是 L 至少有两个实共轭类，从而 L 至少有两个实值特征标(据习题3.3的第8题). 由于$|L/L'|=3$，因此 L 的两个非主特征标的1次特征标其函数值含本原3次单位根 ω. 从而 θ 是实值特征标. 由于 U 的两个非主特征标的1次特征标其函数值含 ω，因此$(\theta|U,1_U)\neq 2$. 显然$(\theta|U,1_U)\neq 3$. 因此$(\theta|U,1_U)=1$. 因为$(\chi|U,1_U)\geqslant 3$，所以 $\chi|L=\theta+\lambda_1+\lambda_2$，其中 λ_i 是 L 的1次特征标并且 $\lambda_i|U$

$=1_U$. 于是 $\lambda_i=1_L, i=1,2$. 这就证明了 $(\chi|L,1_L)=2$. 从而也得出 $(\chi|U,1_U)=3$.

现在选择 U 的一个共轭子群 W 使得 $W\not\subset L$ 并且 $W\not\subset C_G(U)$，这一定可以办到，因为 U 在 G 中有10个共轭子群两两不彼此中心化，而 L 只有4个 Sylow 3-子群. 设 $T=\langle U,W\rangle$. 我们可以假设 $|T|<60$. 根据以上同样的分析得出 $|T|=12$. 因为 $U\subset L\cap T$，所以 $|L\cap T|=3$或6，后者不可能. 于是 $L\cap T=U$. 因为 $(\chi|L,1_L)=2=(\chi|T,1_T)$ 并且 $(\chi|U,1_U)=3$，根据定理5.14.1便得到 L 和 T 生成 G 的真子群 R. 因为 $W\not\subset C_G(U)$，所以 $W\not\subset P$，从而 $W\not\subset N$. 由此得 $R\not\subset N$. 假如 $9\mid |R|$，则 R 含 G 的 Sylow 3-子群. 由于 $U\subset R$，所以 U 被包含在 R 的一个 Sylow 3-子群内. 由于 G 的任意两个 Sylow 3-子群的交为 $\{1\}$，因此 $P\subset R$，从而 $R\subset N$，矛盾. 因此 $9\nmid |R|$. 与前面的理由一样，$|R|\neq 24$. 又由于 R 有12阶子群 L，所以 $12\mid |R|$. 这迫使 $|R|=60$. 因此 $G\cong A_6$. ▌

推论5.14.1 $\mathrm{PSL}(2,9)\cong A_6$.

证明 我们知道射影特殊线性群 $\mathrm{PSL}(n,q)$ 是单群，如果 $n\geqslant 2$ 并且 $(n,q)\neq(2,2)$ 或 $(2,3)$. 我们有

$$\mathrm{PSL}(n,q)=\mathrm{SL}(n,q)/Z(\mathrm{SL}(n,q)),$$

并且 $Z(\mathrm{SL}(n,q))$ 由满足 $\lambda^n=1$ 的数量矩阵 λI 组成，从而它的阶是 $(q-1,n)$. 因此

$$|\mathrm{PSL}(n,q)|=(q-1,n)^{-1}\cdot q^{n(n-1)/2}\prod_{i=2}^{n}(q^i-1).$$

由此得 $|\mathrm{PSL}(2,9)|=360$. 据定理5.14.2即得 $\mathrm{PSL}(2,9)\cong A_6$. ▌

*§15 群 G 在特征 p 不能整除 $|G|$ 的域上的不可约表示

在本章§12我们证明了：有限群 G 在有理数域上的不等价的不可约表示的数目等于 G 的非共轭循环子群的数目. 这一节我们

来讨论有限群 G 在特征为素数 p 且 p 不能整除 $|G|$ 的域上的不可约表示的数目如何确定.

本节中,G 是一个指数为 m 的有限群,K 是特征为素数 p 的域(可以是有限域,也可以是无限域),其中 $p\nmid|G|$,于是 $(p,m)=1$.

如果 K 包含本原 m 次单位根,则据定理5.11.6知道,K 是 G 的一个分裂域. 此时,G 的不等价的不可约 K-表示的数目等于 G 的共轭类的数目. 于是需要进一步讨论的是,K 不包含本原 m 次单位根的情形. 如果 K 是 q 元有限域 $GF(q)$,则 K 包含本原 m 次单位根的充分必要条件是,$q\equiv1(\bmod m)$. 这只要注意到 K^* 是 $q-1$ 阶循环群便可知道.

当 K 不包含本原 m 次单位根时,我们取一个本原 m 次单位根 ζ,K 添加 ζ 得到一个扩域 $F=K(\zeta)$. 设 ζ 在 K 上的极小多项式为 $f(x)$,则 m 次分圆多项式 $\Phi_m(x)$ 是 $f(x)$ 的倍式. 从而 $f(x)$ 的根都是本原 m 次单位根,因此 $F=K(\zeta)$ 是 $f(x)$ 的最小分裂域. 又由于 $(p,m)=1$,因此多项式 x^m-1 与它的导数互素,从而 x^m-1 没有重根. 于是 $f(x)$ 也没有重根,因此 $f(x)$ 是可分多项式. 据文献[15] p.275的定理11得,F/K 是可分正规扩张. 从而据[15] p.304的定理2得,F/K 是**伽罗瓦(Galois)扩张**.

F/K 的全部 K-自同构(即,域 F 的保持 K 中每个元素不动的自同构)组成的群,叫做 F/K 的**伽罗瓦群**,记成 $\mathrm{Gal}(F/K)$. 由于 F/K 是 Galois 扩张,因此 $\mathrm{Gal}(F/K)$ 的不动域等于 K(参看[15] p.297的定义3).

任取 $\sigma\in\mathrm{Gal}(F/K)$,由于 ζ 是方程 $x^m-1=0$ 的一个根,从而 ζ 在 σ 下的像 ζ^σ(或者记作 $\sigma(\zeta)$)也是 $x^m-1=0$ 的一个根. 易知 ζ^σ 也是本原 m 次单位根,因此 $\zeta^\sigma=\zeta^t$ 对于某个满足 $(t,m)=1$ 的正整数 t. 把这个 σ 记作 σ_t. 我们用 $U(m)$ 表示环 $\boldsymbol{Z}/(m)$ 的单位群. 则容易看出,映射 $\sigma_t\mapsto t$ 是 $\mathrm{Gal}(F/K)$ 到 $U(m)$ 的一个单同态. 从而 $\mathrm{Gal}(F/K)$ 与 $U(m)$ 的一个子群同构.

注1 如果 K 是 q 元有限域 $GF(q)$，其中 $q=p^n$，则据伽罗瓦基本定理（参看[15] p. 301），$\mathrm{Gal}(F/K)=\langle\tau^n\rangle$，其中 τ 是 Frobenius 映射：$a\mapsto a^p$，对一切 $a\in F$. 显然，τ^n：$a\mapsto a^q$，对一切 $a\in F$. 所以 $\tau^n=\sigma_q$. 于是 $\mathrm{Gal}(F/K)=\langle\sigma_q\rangle$.

考虑映射：

$$\mathrm{Gal}(F/K)\times G\mapsto G$$

$$(\sigma_t,x)\mapsto x^t,$$

容易验证这个映射给出了 $\mathrm{Gal}(F/K)$ 在 G 上的一个作用.

定义1 G 中元素 x 与 y 称为 **K-共轭**，如果存在 $\sigma_t\in\mathrm{Gal}(F/K)$，使得 x^t 与 y 在 G 中共轭，即存在 $g\in G$，使得 $g^{-1}x^tg=y$.

注2 如果 $K=GF(q)$，则从注1得出，G 中元素 x 与 y 是 K-共轭的充分必要条件为，存在 $g\in G$ 和非负整数 i，使 $g^{-1}x^{q^i}g=y$.

容易验证，K-共轭是 G 上的一个等价关系，等价类称为 G 的 K-共轭类.

G 的 K-共轭类与 G 的共轭类有什么联系？设 G 的全部共轭类组成的集合是

$$\Omega=\{C_1,C_2,\cdots,C_r\}.$$

任取 $\sigma_t\in\mathrm{Gal}(F/K)$，易验证 $C_i^{\sigma_t}$（即，集合 $\{g^t\mid g\in C_i\}$）是 G 的某一个共轭类. 由此可得，$\mathrm{Gal}(F/K)$ 在集合 Ω 上有一个作用. 容易看出. Ω 在 $\mathrm{Gal}(F/K)$ 作用下的**每一条轨道里的共轭类的并集恰好是 G 的一个 K-共轭类**.

我们将要证明：G 的不等价的不可约 K-表示的数目等于 G 的 K-共轭类的数目.

在第四章§3中，我们指出，从群 G 的一个 K-表示 (φ,V) 可以得到 G 在 K 的扩域 F 上的一个表示 (φ^F,V^F)，其中 $V^F=F\otimes_K V$，$\varphi^F(g)=\varphi(g)^F$，$\varphi(g)^F$ 是 V^F 上的一个线性变换，并且如果 $\varphi(g)$ 在 V 的一个 K-基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵是 $\Phi(g)$，那么 $\varphi(g)^F$ 在 V^F 的相应的一个 F-基 $1\otimes\alpha_1,1\otimes\alpha_2,\cdots,1\otimes\alpha_n$ 下的矩阵也是 $\Phi(g)$，只

是此时把 $\Phi(g)$看成域 F 上的矩阵. 因此 φ^F 提供的特征标 χ_{φ^F} 与 φ 提供的特征标 χ_φ 有如下关系：

$$\chi_{\varphi^F}(g) = \chi_\varphi(g), \quad \forall g \in G, \tag{1}$$

只是 χ_{φ^F} 看成 G 上的 F-值函数，而 χ_φ 是 G 上的 K-值函数. 如果 φ 是不可约的，φ^F 却可能可约. 下面我们要研究 φ^F 如何分解？

首先指出，给了群 G 的一个 F-表示 (T,M)，利用 $\mathrm{Gal}(F/K)$ 的一个元素 σ，可以得到群 G 的另一个 F-表示，记成 (T^σ,M^σ)，其中 T^σ 提供的矩阵表示 T^σ 与 T 提供的矩阵表示 T 有如下关系：如果矩阵 $T(g)$的 (i,j)元是 t_{ij}，则矩阵 $T^\sigma(g)$的 (i,j)元为 t_{ij}^σ. M^σ 与 M 作为域 F 上的向量空间是同一个空间，为了强调 M^σ 是表示 T^σ 的表示空间，因此采用记号 M^σ. 我们把 (T^σ,M^σ) 称为 (T,M) 的一个**共轭表示**. 设 T 提供的特征标为 χ，则共轭表示 T^σ 提供的特征标记作 χ^σ，并且容易看出

$$\chi^\sigma(g) = (\chi(g))^\sigma, \quad \forall g \in G \tag{2}$$

我们把 χ^σ 称为 χ 的一个**共轭特征标**.

我们知道，群 G 的 F-表示 (T,M) 可以"线性地"扩充成群代数 $F[G]$的一个表示，记作 T^*，此时表示空间 M 成为 $F[G]$上的一个左模. 令

$$K[G]^F = F \otimes_K K[G],$$

则 $K[G]^F$ 是域 F 上的一个代数，并且可以把 $K[G]^F$ 与 $F[G]$等同. 令 $T^{*\sigma}$是由下列 F-代数同态组成的合成映射：

$$K[G]^F \xrightarrow{\sigma^{-1}\otimes 1} K[G]^F \xrightarrow{T^*} M_n(F) \xrightarrow{\sigma} M_n(F),$$

则 $T^{*\sigma}$是代数 $K[G]^F$(即，$F[G]$)的一个矩阵表示. 这里第一个映射为 $\sigma^{-1}\otimes 1$，之所以需要这个映射，是为了使 $T^{*\sigma}$保持数量乘法. $T^{*\sigma}$在 G 上的限制等于 T^σ. M^σ 也成为 $F[G]$上的一个左模.

容易证明，如果 (T,M)是群 G 的一个不可约 F-表示，则对于每个 $\sigma\in \mathrm{Gal}(F/K)$，$(T^\sigma,M^\sigma)$也是 G 的不可约 F-表示. (用反证法，假如 (T^σ,M^σ)可约，则 M^σ 有一个非平凡的 G 不变子空间. 由此

推出 M 也有非平凡的 G 不变子空间,矛盾).

我们用记号 $\mathrm{IRR}(F[G])$,$\mathrm{IRR}_F(G)$,$\mathrm{Irr}_F(G)$分别表示所有不同构的不可约左 $F[G]$-模,G 的所有不等价的不可约 F-表示,G 的所有不可约 F-特征标组成的集合. 从上述结论得出,$\mathrm{Gal}(F/K)$ 分别在这三个集合上有一个作用. 我们用 $\mathrm{Orb}(M)$,$\mathrm{Orb}(T)$,$\mathrm{Orb}(\chi)$分别表示 M,T,χ 所在的轨道.

定理5.15.1 设(ψ,U)是 G 的一个不可约 K-表示,则存在 G 的一个不可约 F-表示(T,M),使得

$$U^F \cong l\left(\bigoplus_{M^\sigma \in \mathrm{Orb}(M)} M^\sigma\right), \tag{3}$$

$$\psi^F \approx l\left(\bigoplus_{T^\sigma \in \mathrm{Orb}(T)} T^\sigma\right). \tag{4}$$

证明 $U^F = F\otimes_K U$ 是域 F 上的向量空间. 由于 U 是左 $K[G]$-模,因此我们可以定义 $K[G]^F$ 在 U^F 上的作用,使 U^F 成为左 $K[G]^F$-模(参看第四章§3.2定义3上面一段),即成为左 $F[G]$-模.

不妨设 U 是 $K[G]$到极小左理想的直和分解式中的 L_{11},与 U 对应的 $K[G]$的中心本原幂等元为 e_1,$L_{11}\subset A_1$,其中 A_1是 $K[G]$的一个极小双边理想,e_1是 A_1的单位元(参看第二章§3的公式(1),(2),(3),(4)). 由此得出,对于 U 中每个元素 u,有 $e_1u=u$. 即,e_1 在 U 上的作用是 U 的恒等变换.

设 $F[G]$的全部中心本原幂等元组成的集合为

$$W = \{\tilde{e}_1,\tilde{e}_2,\cdots,\tilde{e}_r\}.$$

左 $F[G]$-模 U^F 可以分解成一些不可约左 $F[G]$-模的直和,其中每一个不可约左 $F[G]$-模对应于 $F[G]$的一个中心本原幂等元. 因此只要知道了这些中心本原幂等元,便可以知道 U^F 的不可约成分.

任取 $\sigma\in\mathrm{Gal}(F/K)$,则 $\sigma\otimes 1$是环 KG^F 的一个自同构. 从而 KG^F 的中心本原幂等元在 $\sigma\otimes 1$下的像仍是中心本原幂等元. 因此

Gal(F/K)诱导了在集合 W 上的一个作用.

由于 e_1是 $K[G]$的中心幂等元,因此$1\otimes e_1$是 $K[G]^F$ 的中心幂等元,从而$1\otimes e_1$可以分解成 $K[G]^F$ 的一些中心本原幂等元之和,设$1\otimes e_1$的分解式为

$$1 \otimes e_1 = \tilde{e}_1 + \tilde{e}_2 + \cdots + \tilde{e}_h. \tag{5}$$

由于$1\otimes e_1$被任意 $\sigma\otimes 1$保持不动,因此(5)式右端出现的 $\tilde{e}_1,\tilde{e}_2,\cdots,\tilde{e}_h$ 组成的集合是 W 的若干条轨道的并集. 我们进一步可证,恰好是一条轨道. 假如有几条轨道,用 $\tilde{e}'$表示第1条轨道中元素之和,用 $\tilde{e}''$表示第2条轨道中元素之和,……,等等. 则

$$1 \otimes e_1 = \tilde{e}' + \tilde{e}'' + \cdots, \tag{6}$$

并且 $\tilde{e}',\tilde{e}'',\cdots$都被$\{\sigma\otimes 1\mid\sigma\in\mathrm{Gal}(F/K)\}$固定. 对于 $y\in K[G]^F$,由于 Gal(F/K)的不动域是 K,因此,y 被一切 $\sigma\otimes 1$固定的充分必要条件是 $y\in K[G]$(证明这一事实还需要用到推论4.1.4). 于是 $\tilde{e}'$,$\tilde{e}'',\cdots$都属于 $K[G]$. 从而得出,e_1能分解成 $K[G]$里的正交中心幂等元 $\tilde{e}',\tilde{e}'',\cdots$之和,这与 e_1是 $K[G]$的中心本原幂等元矛盾. 所以(5)式右端的 $\tilde{e}_1,\tilde{e}_2,\cdots,\tilde{e}_h$ 恰好组成一条轨道. 从而可设 $\tilde{e}_j=(\sigma_j\otimes 1)\tilde{e}_1(j=2,3,\cdots,h)$. 注意这里的 σ_j 的 j 是下标,与前面用的记号 σ_t 的 t 有不同含义.

在 $K[G]^F$(即,$F[G]$)到极小左理想的直和分解式中,设 M 是与 $\tilde{e}_1$对应的一个不可约左 $F[G]$-模,T^*是 M 提供的代数 $F[G]$的矩阵表示. 容易验证,$\tilde{e}_j$ 在 M^{σ_j}上的作用是恒等变换(这只要验证矩阵 $T^{*\sigma_j}(\tilde{e}_j)$是单位矩阵即可). 从而 M^{σ_j}是 $\tilde{e}_j$ 对应的不可约左 $F[G]$-模,$j=2,3,\cdots,h$. 因此,$\{M,M^{\sigma_2},\cdots,M^{\sigma_h}\}$是 IRR$(F[G])$的一条轨道.

设 $F[G]$到极小左理想的一个直和分解式为

$$F[G] = W_{11} \oplus \cdots \oplus W_{1n_1} \oplus \cdots \oplus W_{r1} \oplus \cdots \oplus W_{rn_r}, \tag{7}$$

其中 $W_{ij}\cong W_{kl}$当且仅当$i=k$;$W_{11}=M$,$\tilde{e}_i$ 与 $W_{i\cdot}$对应,$i=1,2,\cdots,r$. 我们知道,$\tilde{e}_i$ 在 $W_{i\cdot}$上的作用是恒等变换,而 $\tilde{e}_i$ 在 $W_{k\cdot}$上的作用

是零变换(当 $k\neq i$). 设

$$U^F \cong l_1W_{11} \oplus l_2W_{21} \oplus \cdots \oplus l_rW_{r1}, \tag{8}$$

则

$$\begin{aligned}(1\times e_1)U^F &\cong (\tilde{e}_1+\tilde{e}_2+\cdots+\tilde{e}_h)(l_1W_{11}\oplus l_2W_{21}\oplus\cdots\oplus l_rW_{r1})\\ &= l_1W_{11}\oplus l_2W_{21}\oplus\cdots\oplus l_hW_{h1}\\ &= l_1M\oplus l_2M^{\sigma_2}\oplus\cdots\oplus l_hM^{\sigma_h}.\end{aligned} \tag{9}$$

由于 $U^F=F\otimes_K U$, 从而 $(1\otimes e_1)U^F=U^F$. 因此从(9)式得

$$U^F \cong l_1M \oplus l_2M^{\sigma_2} \oplus \cdots \oplus l_hM^{\sigma_h}. \tag{10}$$

任取 $\sigma\in \mathrm{Gal}(F/K)$, 易看出, $(\sigma\otimes 1)U^F=U^F$. (10)式表明, U^F 同构于 l_1个 M, l_2个 M^{σ_2}, $\cdots$, l_h 个 M^{σ_h}的直和. 由于 $(\sigma\otimes 1)U^F=U^F$, 因此 U^F 又同构于 l_1个 M^σ, l_2个 $M^{\sigma_2\sigma}$, $\cdots$, l_h 个 $M^{\sigma_h\sigma}$的直和(这从矩阵表示容易看出). 即

$$U^F \cong l_1M^\sigma \oplus l_2M^{\sigma_2\sigma} \oplus \cdots \oplus l_hM^{\sigma_h\sigma}. \tag{11}$$

利用 Jordan-Hölder 定理, 并且注意到 σ 的任意性以及 $\{M, M^{\sigma_2}, \cdots, M^{\sigma_h}\}$是一条轨道, 便得出

$$l_1 = l_2 = \cdots = l_h, \tag{12}$$

从而得到(3)式和(4)式. ▌

从定理5.15.1的证明过程中看出, $K[G]$的每一个中心本原幂等元对应于 $F[G]$的中心本原幂等元的一条轨道(在 $\mathrm{Gal}(F/K)$诱导的作用下), 反之亦然. 因此 $K[G]$的**中心本原幂等元的数目等于 $F[G]$的中心本原幂等元的轨道条数**.

从定理5.15.1还可以看到, 每一个不可约左 $K[G]$-模对应于 $\mathrm{IRR}(F[G])$的一条轨道(在 $\mathrm{Gal}(F/K)$的作用下), 反之亦然, 并且不同构的不可约左 $K[G]$-模对应于 $\mathrm{IRR}(F[G])$的不同的轨道. 因此, **不同构的不可约左 $K[G]$-模的数目等于$\mathrm{IRR}(F[G])$的轨道条数**. 由此得出, **群 G 的不等价的不可约 K-表示的数目等于 $\mathrm{IRR}_F(G)$的轨道条数**.

设 μ 是 G 的不可约 K-表示(ψ, U)提供的特征标, 从(4)式和

(1)式得

$$\mu = l \sum_{\chi^\sigma \in \mathrm{Orb}(\chi)} \chi^\sigma, \tag{13}$$

其中 χ 是 G 的不可约 F 表示 T 提供的特征标. 由此得出,**G 的不可约 K 特征标的数目等于 $\mathrm{Irr}_F(G)$ 的轨道条数**,从而也等于 $\mathrm{IRR}_F(G)$**的轨道条数**(因为 F 是群 G 的分裂域). 结合上一段的结论便得到

推论5.15.1 如果域 K 的特征 p 不能整除群 G 的阶,则 G 的不等价的不可约 K-表示的数目等于 G 的不可约 K-特征标的数目. 从而 G 的两个不可约 K-表示等价的充分必要条件为它们提供的特征标相等. ∎

从推论5.15.1与定理3.2.4得出,**设 K 是特征不能整除群 G 的阶的任一域,则 G 的两个不可约 K-表示等价当且仅当它们提供的特征标相等**. 这个结论改进了推论3.2.2的结果,把"K 是 G 的分裂域"这一条件去掉了.

推论5.15.2 设 $\mathrm{Irr}_K(G)=\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_s\}$,则 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_s$ 是 K-线性无关的.

证明 设

$$k_1\mu_1 + k_2\mu_2 + \cdots + k_s\mu_s = 0, \quad k_i \in K. \tag{14}$$

设 $\mathrm{Irr}_F(G)$ 被划分成 s 条轨道 $\Omega_1,\Omega_2,\cdots,\Omega_s$,其中 μ_i 对应于 Ω_i,$i=1,2,\cdots,s$. 于是据(13)式得

$$k_1l_1\sum_{\chi\in\Omega_1}\chi + k_2l_2\sum_{\chi\in\Omega_2}\chi + \cdots + k_sl_s\sum_{\chi\in\Omega_s}\chi = 0. \tag{15}$$

因为 $\mathrm{Irr}_F(G)$ 中元素是 F-线性无关的,从(15)式得出

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0,$$

从而 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_s$ 是 K-线性无关的. ∎

命题5.15.1 设 μ 是 G 的一个 K-特征标,则 μ 在 G 的每个 K-共轭类上取常数值.

证明 设 x 与 y 是 G 里的 K-共轭元素,则有 $\sigma_t\in\mathrm{Gal}(F/K)$,

使得 x^t 与 y 在 G 中共轭. 从而得出

$$\mu(x^t) = \mu(y). \tag{16}$$

设 μ 是 G 的矩阵表示 Ψ 提供的特征标，设 $\Psi(x)$ 的特征多项式为 $h(\lambda)$. 因为 $x^m=1$，所以 $\Psi(x)^m=I$，其中 I 是单位矩阵，从而 $h(\lambda)$ 的根都是 m 次单位根，设它们为 $\zeta^{i_1},\zeta^{i_2},\cdots,\zeta^{i_n}$. 于是

$$\mu(x) = T_r(\Psi(x)) = \zeta^{i_1} + \zeta^{i_2} + \cdots + \zeta^{i_n}. \tag{17}$$

由于 $\Psi(x^t)=\Psi(x)^t$，而 $\Psi(x)^t$ 的特征多项式的根为 $\zeta^{i_1t},\zeta^{i_2t},\cdots,\zeta^{i_nt}$. 因此

$$\mu(x^t) = T_r(\Psi(x^t)) = \zeta^{i_1t} + \zeta^{i_2t} + \cdots + \zeta^{i_nt}. \tag{18}$$

由于 $\mu(x)\in K$，因此

$$\begin{aligned}\mu(x) &= (\mu(x))^{\sigma_t} = (\zeta^{i_1} + \zeta^{i_2} + \cdots + \zeta^{i_n})^{\sigma_t} \\ &= \zeta^{i_1t} + \zeta^{i_2t} + \cdots + \zeta^{i_nt} = \mu(x^t).\end{aligned} \tag{19}$$

从(16)和(19)式得出

$$\mu(x) = \mu(y). \tag{20}$$

因此 μ 在 G 的 K-共轭类上取常数值. ▌

类似于命题5.15.1的证明，并且利用(2)式，我们可得出

命题5.15.2 设 χ 是 G 的一个 F-特征标，则对于任意 $\sigma_t\in \mathrm{Gal}(F/K)$，有

$$\chi^{\sigma_t}(g) = \chi(g^t), \quad \forall\, g \in G. \quad ▌ \tag{21}$$

在 G 的 K-共轭类上取常数值($\in K$)的函数称为 G 的 **K-共轭类函数**. 由于 G 的 K-共轭类是 G 的一些共轭类的并集，因此 G 的每个 K-共轭类函数是 G 的 K 值类函数. 从而容易看出，G 的所有 K-共轭类函数组成的集合，记作 $KCf(G)$，是 G 的 K 值类函数空间 $Cf_K(G)$ 的一个线性子空间. 现在我们可以来证明这一节的主要定理：

定理5.15.2 设 G 是有限群，K 是特征为素数 p 且 p 不能整除 $|G|$ 的域，则 G 的不等价的不可约 K-表示的数目等于 G 的 K-共轭类的数目.

证明 设 G 的指数为 m，如果 K 包含一个本原 m 次单位根

ζ，则 K 是 G 的一个分裂域．从而此时 G 的不等价的不可约 K-表示的数目等于 G 的共轭类的数目．此时，$K(\zeta)=K$，因此 $\mathrm{Gal}(K(\zeta)/K)$ 只含一个元素：K 上的恒等变换．从而 G 的 K-共轭类就是 G 的共轭类．

下面设 K 不包含本原 m 次单位根．取一个本原 m 次单位根 ζ，令 $F=K(\zeta)$．

设 G 有 r 个 K-共轭类，它们的代表元分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_r$．则 G 的每个 K-共轭类函数 f 完全被 r 元有序组 $(f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_r))$ 决定．从而 $KCf(G)$ 与 K^r 同构．因此 $\dim_K KCf(G)=r$．

设 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_s$ 是 G 的全部不可约 K-特征标．据命题5.15.1和推论5.15.2知道，$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_s$ 是 $KCf(G)$ 里的一组线性无关的向量．如果我们能证明每个 K-共轭类函数 f 可以由 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_s$ K-线性表出．那么 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_s$ 是 $KCf(G)$ 的一个 K-基．由此得出，$r=s$．

任取 $\sigma_t\in\mathrm{Gal}(F/K)$，由于 f 是 K 值函数，因此

$$(f(x))^{\sigma_t}=f(x),\quad \forall\, x\in G. \tag{22}$$

我们规定

$$f^{\sigma_t}(x)=(f(x))^{\sigma_t},\quad \forall\, x\in G. \tag{23}$$

从(22)式得

$$f^{\sigma_t}=f, \tag{24}$$

即，G 的每个 K-共轭类函数 f 在 $\mathrm{Gal}(F/K)$ 作用下保持不动．

显然，对于任意 $x\in G$，x 与 x^t 是 K-共轭的．因此

$$f(x)=f(x^t),\quad \forall\, x\in G. \tag{25}$$

从而

$$f^{\sigma_t}(x)=f(x^t),\quad \forall\, x\in G. \tag{26}$$

f 也是 G 的 K 值类函数，从而 f 可看成是 G 的 F 值类函数．由于 F 是 G 的分裂域，据定理3.2.7知道，G 的全部不可约 F-特征标 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_v$ 是 $Cf_F(G)$ 的一个 F-基．因此有

$$f = \sum_{i=1}^{v} a_i \chi_i, \quad a_i \in F. \tag{27}$$

据推论3.2.4得

$$a_i = \langle f, \chi_i \rangle, \quad i = 1, 2, \cdots, v. \tag{28}$$

于是

$$\begin{aligned} a_i^{\sigma_t} &= \langle f, \chi_i \rangle^{\sigma_t} = \Big(|G|^{-1} \sum_{g \in G} f(g) \chi_i(g^{-1}) \Big)^{\sigma_t} \\ &= |G|^{-1} \sum_{g \in G} (f(g))^{\sigma_t} (\chi_i(g^{-1}))^{\sigma_t} \\ &= |G|^{-1} \sum_{g \in G} f(g^t) \chi_i(g^{-t}) \\ &= |G|^{-1} \sum_{y \in G} f(y) \chi_i(y^{-1}) \\ &= \langle f, \chi_i \rangle = a_i. \end{aligned}$$

由于 $\mathrm{Gal}(F/K)$ 的不动域是 K，从上式得出

$$a_i \in K, \quad i = 1, 2, \cdots, v. \tag{29}$$

所以

$$f = \sum_{i=1}^{v} a_i \chi_i, \quad a_i \in K, \tag{30}$$

于是得出

$$\sum_{i=1}^{v} a_i \chi_i = f = f^{\sigma_t} = \sum_{i=1}^{v} a_i \chi_i^{\sigma_t}. \tag{31}$$

由于 σ_t 是 $\mathrm{Gal}(F/K)$ 中任一元素，因此从(31)式得出，$\mathrm{Irr}_F(G)$ 的处于同一条轨道上的元素在 f 的表达式中的系数相等. 设 $\mathrm{Irr}_F(G)$ 被划分成 s 条轨道 $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_s$，其中轨道 Ω_j 对应于 μ_j，则(30)式可以改写成

$$f = \sum_{j=1}^{s} a_j \Big(\sum_{\chi \in \Omega_j} \chi \Big). \tag{32}$$

由于 $\mu_j = l_j \Big(\sum_{\chi \in \Omega_j} \chi \Big)$，因此(32)式成为

$$f = \sum_{j=1}^{s} \frac{a_j}{l_j} \mu_j, \tag{33}$$

这表明 f 可以由 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_s$ K-线性表出. ▌

推论5.15.3 设 K 是特征 p 不能整除群 G 的阶的域，则 $K[G]$的本原中心幂等元的数目等于 G 的 K 共轭类的数目. ▌

推论5.15.4 设 $K=GF(q)$，$q=p^n$. p 不能整除群 G 的阶. 设 $B_1,B_2,\cdots,B_s$ 是 G 的全部 K-共轭类，用 b_j 表示 B_j 中元素的和(称 b_j 是 K-共轭类的类和)，则

$$b_j^q = b_j, \quad j = 1,2,\cdots,s. \tag{34}$$

(**注**：等式(34)在讨论群代数码的问题时有用.)

证明 据推论5.15.3，可设 $K[G]$的全部中心本原幂等元是 $e_1,e_2,\cdots,e_s$. 设 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_s$ 是 G 的全部不可约 K-特征标，且 μ_i 的次数为 $n_i(i=1,2,\cdots,s)$. 据引理3.2.2，得

$$e_i = \frac{n_i}{|G|}\sum_{g\in G}\mu_i(g^{-1})g, \quad i = 1,2,\cdots,s. \tag{35}$$

如果 x 与 y 是 K-共轭，则 x^{-1}与 y^{-1}也 K-共轭. 因此当 g 跑遍 B_j 中元素时，$\mu_i(g^{-1})$取常数值. 从而

$$e_i = \sum_{j=1}^{s}k_{ij}b_j, \quad k_{ij}\in K, \quad i = 1,2,\cdots,s. \tag{36}$$

因此 $e_i\in\langle b_1,b_2,\cdots,b_s\rangle$，$i=1,2,\cdots,s$. 由于 G 的共轭类的类和 c_1，$c_2,\cdots,c_r$ 是 $Z(K[G])$的一个 K-基，而每个 b_j 是一些类和的和(这是因为 B_j 是一些共轭类的并集)，因此，$b_1,b_2,\cdots,b_s$ 是 K-线性无关的. 又易知 $e_1,e_2,\cdots,e_s$ 是 K-线性无关的，由上述得出

$$\langle e_1,e_2,\cdots,e_s\rangle = \langle b_1,b_2,\cdots,b_s\rangle. \tag{37}$$

从而每个 b_j 是 $e_1,e_2,\cdots,e_s$ 的 K-线性组合. 由于当 $i\neq j$ 时，$e_ie_j=0$，并且 $K=GF(q)$中每个元素 a 满足 $a^q=a$，因此 $b_j^q=b_j(j=1,2,\cdots,s)$. ▌

*第六章　紧致群的线性表示

在第一章 §1 我们就指出：利用群 G 的线性表示可以研究 G 的结构. 为了研究拓扑群的结构，通过研究它的线性表示是一条途径. 紧致拓扑群的线性表示在许多方面类似于有限群的线性表示. 本章就来介绍紧致拓扑群的线性表示的理论.

§1　拓　扑　群

1.1　拓扑空间

本节介绍拓扑空间的一些基本概念和基本结论. 想了解这些结论的证明的读者，请看《基础拓扑学》(M. A. Armstrong 著，孙以丰译，李同孚校，北京大学出版社，1983).

定义 1　集合 X 上的一个**拓扑**是由 X 的子集构成的一个非空组，它的成员叫做**开集**，它们满足下列要求：任意多个开集的并集是开集，有限多个开集的交集是开集，X 与空集是开集. 集合配备了它上面的一个拓扑以后叫做一个**拓扑空间**.

在 n 维欧氏空间 $\boldsymbol{E}^n$ 的'通常'拓扑中，开集的刻画如下. 集合 U 为开集，假如对于 $x\in U$，总可以找到正的实数 ϵ，使得以 x 为中心，ϵ 为半径的球整个落在 U 内. 容易验证，它满足定义 1 中的三条要求. 因此 $\boldsymbol{E}^n$ 配备了这个拓扑以后成为拓扑空间. 今后每当提到 $\boldsymbol{E}^n$ 时，我们总认为给的是这个拓扑.

若 X 为拓扑空间，Y 为 X 的子集，Y 上的**子空间拓扑**，或**诱导拓扑**是以 X 的开集与 Y 的交作为这个拓扑的开集而定义的. 如果拓扑空间 X 的子集 Y 配备了子空间拓扑，那么称 Y 是 X 的**子空间**.

一个极端的情形是 X 上的**离散拓扑**. 这时，X 的每一个子集

都是开集. 这是在一个给定的集合 X 上所可能有的最大拓扑(如果一个拓扑包含了另一个拓扑内所有的开集,则说它'大于'另外那个拓扑). 具有离散拓扑的空间叫做**离散空间**. 例如,若我们取 E^n 内具有整数坐标的全体点,并给以子空间拓扑,则所得的是离散空间.

拓扑空间的子集叫做**闭集**,假如它的余集是开集. 空间 X 的一个子集可以既不是开的,也不是闭的. 例如,E^2 内满足 $x\geqslant 0$ 与 $y>0$ 的点(x,y)的全体所构成的集合. 但是,一个子集也可以同时是开的又是闭的. 例如,取空间 X 为 E^2 内满足 $x\geqslant 1$,或 $x\leqslant -1$ 的所有的点(x,y)构成,具备由 E^2 诱导的拓扑. X 内第一个坐标为正的点所构成的子集是 X 内既开又闭的子集(但它当然不是 E^2 的开集). 由余集的 De Morgan 公式立即得出:任意多个闭集的交集为闭集,有限多个闭集的并集是闭集.

对于拓扑空间 X 的点 x,我们称 X 的子集 N 为 x 的**邻域**,假如可以找到开集 O,满足 $x\in O\subseteq N$.

一个子集为开集,当且仅当它是它自己每个点的邻域.

设 A 为拓扑空间 X 的子集,点 $p\in X$ 叫做 A 的**极限点**,假如 p 的每个邻域包含了 $A-\{p\}$的至少一点.

一个子集为闭集,当且仅当它包含了自己所有的极限点.

A 与它所有的极限点的并集叫做 A 的**闭包**,记作 $\overline{A}$. A 的闭包是最小的包含 A 的闭集,换句话说,是包含 A 的一切闭集之交.

一个集合为闭集,当且仅当它等于自己的闭包.

闭包等于整个空间的集合叫做是**稠密**的. 稠密集与空间的任何开集相交.

集合 A 的**内部**是包含于 A 的所有开集之并,记作 $\mathring{A}$. 一点 x 属于 A 的内部,当且仅当 A 是 x 的邻域. 开集是它自己的内部.

集合 A 的**边界**是 A 的闭包与 $X-A$ 的闭包之交. 一个等价的定义是 X 内既不属于 A 的内部,又不属于 $X-A$ 内部的点所构成的集合.

设集合 X 上有了一个拓扑，β 为这个拓扑的一组开集，使得每个开集可以写成 β 中成员的并集. 则 β 叫做这个拓扑的一个**拓扑基**. 一个等价的陈述方式是对于任意点 $x\in X$，以及 x 的邻域 N，有 β 的成员 B 使得 $x\in B\subseteq N$. 例如，取 X 为实数轴 $\boldsymbol{R}$（即，$\boldsymbol{E}^1$），全体开区间构成一个拓扑基. 而具有有理数端点的开区间全体构成一个更小些的拓扑基（注意这第二个拓扑基是可数的）. 因为所有基数所成的集合是良序集，所以在拓扑空间 X 的所有拓扑基中存在具有最小基数的拓扑基，这个最小基数称为拓扑空间 X 的**权**.

用给出一个拓扑基的办法来描述拓扑结构往往是很方便的.

设 β 是由 X 的子集构成的一个非空组，若 β 内有限多个成员的交仍属于 β，并且若 $\bigcup_{B\in\beta}B=X$，则 β 是 X 上某个拓扑的拓扑基.

定义 2 设 X 与 Y 为拓扑空间. 映射 $f:X\to Y$ 称为**连续映射**，如果对于 X 的每点 x，以及 $f(x)$ 在 Y 内的任意邻域 N，集合 $f^{-1}(N)$ 为 x 在 X 内的邻域. 映射 $f: X\to Y$ 叫做是一个**同胚**，如果它是一对一，连续满射，并且有连续的逆映射. 如果这样一个映射存在，则称 X **同胚于** Y，或 X **拓扑等价于** Y.

连续性的概念用开集来陈述特别方便. 设 X 与 Y 为拓扑空间，从 X 到 Y 的映射连续，当且仅当 Y 的每个开集在 X 内的原像是 X 的开集.

连续映射的合成为连续映射.

设 X 与 Y 为拓扑空间. 设 $f: X\to Y$ 连续，并且设 $A\subseteq X$ 具有子空间拓扑，则限制映射 $f|A: A\to Y$ 连续.

从 X 到 X 把每点映到自己的映射叫做 X 的**恒等映射**，记作 1_X. 若将 1_X 限制在 X 的子空间 A，则得到**含入映射**

$$i: A\hookrightarrow X.$$

设 X 与 Y 为拓扑空间. 下列各条是等价的：

(i) $f: X\to Y$ 是连续映射；

(ii) 若 β 是 Y 的一个拓扑基，则 β 内每个成员的原像为 X 的

开集；

(iii) $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$，对于 X 的任何子集 A；

(iv) $\overline{f^{-1}(B)}\subseteq f^{-1}(\overline{B})$，对于 Y 的任何子集；

(v) Y 内任何闭集的原像为 X 的闭集.

例 6.1.1 设 C 为复平面上的单位圆周，配备以子空间拓扑；区间 $[0,1)$ 给以实数轴的子空间拓扑. 定义 $f:[0,1)\to C$ 按照 $f(x)=e^{2\pi ix}$. 我们来说明 f 是连续映射：取 C 的全体开弧段作为 C 的一个拓扑基. 若弧段 S 不包含复数 1，则 $f^{-1}(S)$ 是形如 (a,b) 的开区间，其中 $0<a<b<1$. 因此 $f^{-1}(S)$ 是 $[0,1)$ 内的开集. 若弧段 S 含有 1，则 $f^{-1}(S)$ 具有形状如 $[0,a)\cup(b,1)$，其中 $0<a<b<1$. 因为它是实数轴的开集 $(-1,a)\cup(b,1)$ 与 $[0,1)$ 的交集，所以它是 $[0,1)$ 内的开集. 据上述的(ii)，f 是连续的. 这个映射还显然是双射. 但是，它的逆映射却不是连续的. 为了看出这一点，只需找到 $[0,1)$ 的开集 O，使得 $(f^{-1})^{-1}(O)=f(O)$ 在 C 内不是开集. 取 O 为区间 $\left[0,\frac{1}{2}\right)$；这在 $[0,1)$ 内是开集，但它在指数映射之下的像是 C 内满足 $0\leqslant\arg z<\pi$ 的复数 z 的集合，这个集合在 C 内不是开集.

将开集映为开集的映射叫做**开映射**；将闭集映为闭集的映射叫做**闭映射**.

拓扑空间 X 到拓扑空间 $\boldsymbol{R}$(即，$\boldsymbol{E}^1$)内的连续映射称为 X 上的实值连续函数. 有这样的结果：空间 X 到空间 $\boldsymbol{R}$ 内的映射 f 在点 $a\in X$ 处连续的充要条件是对每一个正数 ε，在 X 中存在点 a 的邻域 U，使得当 $x\in U$ 时，有 $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

若拓扑空间的任意不同的两点分别包含于不相交的两个开集内，则称为 **Hausdorff 空间**.

拓扑空间的紧致性是实数轴上有界闭区间的一个熟知的性质的推广. 这个性质是：在有界闭区间中每一无限集都有极限点；从有界闭区间的每一开集覆盖中可以选取有限个开集来覆盖这有界闭区间.

设 X 为拓扑空间，$\mathscr{F}$ 为 X 的一组开集，它们的并集是整个 X，这样的一组开集叫做 X 的一个**开覆盖**. 若 $\mathscr{F}'$ 是 $\mathscr{F}$ 的一个子组，并且若 $\bigcup_{B\in\mathscr{F}'} B=X$，则 $\mathscr{F}'$ 叫做 $\mathscr{F}$ 的一个**子覆盖**.

定义 3 拓扑空间 X **紧致**，假如 X 的任何开覆盖包含有限子覆盖.

拓扑空间 X 的子集 C 称为**紧致子集**，如果子空间 C 是紧致空间. 可以证明：欧氏空间内的有界闭集是紧致子集.

紧致空间具有非常好的性质：

1）在紧致空间上定义的实值连续函数是有界的，并且达到它的上下确界.

2）紧致空间内的无限子集必有极限点.

3）紧致性是空间的拓扑性质. 即，若 X 紧致，并且 X 同胚于 Y，则 Y 也紧致.

4）紧致空间的连续像是紧致的.

5）紧致空间的闭子集是紧致的.

6）Hausdorff 空间的紧致子集是闭集.

7）从紧致空间 X 到 Hausdorff 空间 Y 的连续双射是一个同胚.

8）欧氏空间内的紧致子集是有界闭集.

拓扑空间叫做**局部紧致**，假如它的每点有一个紧致邻域.

定义 4 设 X 与 Y 为拓扑空间，$\mathscr{B}$ 为 $X\times Y$ 内形状如 $U\times V$ 的子集组，其中 U 为 X 的开集，V 为 Y 的开集. 则 $\bigcup_{B\in\mathscr{B}} B=X\times Y$，并且 $\mathscr{B}$ 中任意两个成员的交集属于 $\mathscr{B}$. 因此 $\mathscr{B}$ 构成 $X\times Y$ 上的一个拓扑基，这个拓扑叫做**乘积拓扑**，集合 $X\times Y$ 配备了乘积拓扑之后叫做**乘积空间**. 这种构造对于有限多个空间作乘积也完全适用. 若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为拓扑空间，则乘积集合 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 上的乘积拓扑，以形状如 $U_1\times U_2\times\cdots\times U_n$ 的集合构成它的一个拓扑基，其中 U_i 是 X_i 的开集，$1\leqslant i\leqslant n$.

按照 $P_1(x,y)=x$，$P_2(x,y)=y$ 而定义的映射 $P_1: X\times Y\to X$，$P_2: X\times Y\to Y$ 叫做**投影**.

若 $X\times Y$ 具有乘积拓扑，则投影为连续开映射. 乘积拓扑是 $X\times Y$ 上使两个投影都连续的最小的拓扑.

往后，每当提起 $X\times Y$ 总假定它具有乘积拓扑，并假定 X 与 Y 都非空.

映射 $f: Z\to X\times Y$ 连续，当且仅当两个合成映射 $P_1f: Z\to X$，$P_2f: Z\to Y$ 都连续.

乘积空间 $X\times Y$ 为 Hausdorff 空间，当且仅当 X 与 Y 为 Hausdorff 空间.

$X\times Y$ 紧致，当且仅当 X 与 Y 都紧致.

定义 5 拓扑空间 X 是**连通的**，假如当它分解成为两个非空子集的并集 $A\cup B$ 时，则 $\overline{A}\cap B\neq\varnothing$，或 $A\cap\overline{B}\neq\varnothing$.

拓扑空间的子集叫做是**连通子集**，假若给以诱导拓扑时它成为一个连通空间.

对于拓扑空间 X，下列条件是等价的：

(i) X 连通.

(ii) X 内同时为开集与闭集的子集只有 X 与空集.

(iii) X 不能表示为两个不相交非空开集的并集.

(iv) 不存在连续满映射从 X 到一个多于一点的离散拓扑空间上去.

连通空间的连续像是连通空间.

连通性是空间的拓扑性质. 即，若 $h: X\to Y$ 为同胚，则 X 连通，当且仅当 Y 连通.

设 X 为拓扑空间，Z 为 X 的子集. 若 Z 连通，并在 X 内稠密，则 X 连通.

若 X 与 Y 是连通空间，则乘积空间 $X\times Y$ 是连通的. 从这个结果立刻知道 n 维欧氏空间是连通的，因为它是实数轴的 n 个拷贝的乘积. 其次，考虑 E^{n+1}内的单位球面 S^n，$n\geqslant 1$. S^n 称为 n 维球

面，如果它是由 E^{n+1} 内到原点的距离等于 1 的点构成，并采取子空间拓扑. 如果我们从 S^n 除去一点，则得到同胚于 E^n 的一个空间. 但当 $n\geqslant1$ 时，除去一点的 S^n 在 S^n 内的闭包是整个 S^n，因此当 $n\geqslant1$ 时 S^n 为连通空间. 又环面可以看作 $S^1\times S^1$，因此也是连通的.

若 A 与 B 是拓扑空间 X 的子集，并且若 $\bar{A}\cap\bar{B}=\varnothing$，则称 A 与 B 在 X 内是互相**分离的**.

若一个空间不是连通的，则它分裂为一些连通子集的并集，其中任意两个是互相分离的. 我们称这些连通子集为**连通分支**. 更正式一些说，拓扑空间 X 的连通分支就是它的极大连通子集.

拓扑空间的连通分支为闭集，不同的连通分支在空间内是互相分离的.

空间 X 叫做**局部连通**，假如对于任意 $x\in X$，以及 x 的邻域 U，有 x 的连通邻域 V 包含于 U.

1.2 拓扑群

定义 6 如果一个群 G 配备了一个拓扑使得群的乘法和求逆运算

$$(x,y)\mapsto xy,\quad x\mapsto x^{-1}$$

都是连续映射，则称 G 是一个**拓扑群**.

拓扑群的例子

1. 实数轴，群结构是实数的加法.

2. 单位圆周 S^1，可以把它看作由模为 1 的复数组成. 它的拓扑是从平面诱导来的，群结构就是复数的乘法.

3. 具有离散拓扑的任意抽象群.

4. 环面看作两个单位圆周的乘积空间. 取乘积拓扑与群的直积结构. 一般地，两个拓扑群的直积（即，取乘积拓扑与群的直积结构）为拓扑群.

5. 3 维球面 S^3 看作四元数空间 $\boldsymbol{H}$ 内的单位球面（$\boldsymbol{H}$ 作为拓扑空间是 E^4，并具有四元数的代数结构），群结构是乘法.

6. n 维欧氏空间，群结构为通常的加法．为了强调所考虑的是拓扑群，而不单单只是拓扑空间 $\boldsymbol{E}^n$，我们采用记号 $\boldsymbol{R}^n$．

7. 实数域上的一般线性群 $\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R})$，配备的拓扑是：将每个 n 级矩阵 $A=(a_{ij})$ 等同于 $\boldsymbol{E}^{n^2}$ 的点

$$(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n},a_{21},\cdots,a_{2n},\cdots,a_{n1},\cdots,a_{nn})$$

而取诱导拓扑．我们来证明 $\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R})$ 是拓扑群：

设 $A=(a_{ij})\in M_n(\boldsymbol{R})$，我们可以把 $M_n(\boldsymbol{R})$ 等同于 n^2 维欧氏空间，这样等同之后就使得 $M_n(\boldsymbol{R})$ 具备一个拓扑．我们来说明，关于这个拓扑，矩阵乘法 $m\colon M_n(\boldsymbol{R})\times M_n(\boldsymbol{R})\to M_n(\boldsymbol{R})$ 为连续映射．设 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，则乘积 $m(A,B)$ 的 (i,j) 元是 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$．现在 $M_n(\boldsymbol{R})$ 具有乘积空间 $\boldsymbol{E}^1\times\boldsymbol{E}^1\times\cdots\times\boldsymbol{E}^1$（$n^2$ 个因子）的拓扑，对于任何满足 $1\leqslant i,j\leqslant n$ 的 i,j，我们有投影映射 $\pi_{ij}\colon M_n(\boldsymbol{R})\to\boldsymbol{E}^1$，将矩阵 A 映为它的 (i,j) 元．m 连续，当且仅当所有的合成映射

$$M_n(\boldsymbol{R})\times M_n(\boldsymbol{R})\xrightarrow{m}M_n(\boldsymbol{R})\xrightarrow{\pi_{ij}}\boldsymbol{E}^1$$

为连续．现在 $\pi_{ij}m(A,B)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$ 是 A 与 B 的元素的多项式，因此 $\pi_{ij}m$ 连续，从而 m 连续．

$\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R})$ 是 $M_n(\boldsymbol{R})$ 的子集，给 $\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R})$ 以从 $M_n(\boldsymbol{R})$ 诱导的子空间拓扑，由于限制映射 $m|\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R})$ 连续，所以 $\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R})$ 的乘法是连续映射．剩下只需证明求逆映射 $f\colon A\mapsto A^{-1}$ 也是连续的．

f 连续，当且仅当所有的合成映射

$$\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R})\xrightarrow{f}\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R})\subseteq\boldsymbol{E}^1\times\cdots\times\boldsymbol{E}^1$$

为连续．用 A_{ij} 表示矩阵 A 的元素 a_{ij} 的代数余子式，则

$$\pi_{ij}f(A)=\pi_{ij}(A^{-1})=\frac{1}{|A|}A_{ji}.$$

由于 A 的行列式 $|A|$ 以及 A 的任一元素的代数余子式都是 A 内元素的多项式，并且由于对一切 $A\in\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R})$ 有 $|A|\neq0$，所以 $\pi_{ij}f$ 为连续．从而 f 连续．这就完成了 $\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R})$ 为拓扑群的证明． ▌

顺便指出，$GL(n,\boldsymbol{R})$是行列式映射 $\det: M_n(\boldsymbol{R})\to\boldsymbol{R}$ 之下，全体非 0 实数的原像. 由于 det 是连续映射，因此 $GL(n,\boldsymbol{R})$是$M_n(\boldsymbol{R})$内的开集. 从而 $GL(n,\boldsymbol{R})$**不紧致**(因为欧氏空间内的紧致子集是有界闭集). 又由于行列式为正的与行列式为负的矩阵划分 $GL(n,\boldsymbol{R})$为两个互不相交的非空开集，因此 $GL(n,\boldsymbol{R})$**不连通**.

设 V 是实数域上的 n 维向量空间，则 $GL(V)$也是拓扑群，配备的拓扑是：将 $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(V,V)$ 等同于 n^2 维欧氏空间，这样 $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(V,V)$就具备一个拓扑. 然后 $GL(V)$取诱导拓扑.

类似地，复数域 $\boldsymbol{C}$ 上的一般线性群 $GL(n,\boldsymbol{C})$也是拓扑群. 设 V 是复数域上的 n 维向量空间，则 $GL(V)$是拓扑群.

映射 f 称为两个拓扑群之间的**同构**，如果 f 是一个群同构，又是一个同胚. 例如，拓扑群 $GL(V)$与 $GL(n,\boldsymbol{R})$同构，如果 V 是实数域上的 n 维向量空间. 而若 V 是 $\boldsymbol{C}$ 上 n 维向量空间，则拓扑群 $GL(V)$与 $GL(n,\boldsymbol{C})$同构.

拓扑群的子集叫做**子群**，如果代数上它构成一个子群，同时还具有子空间拓扑. 拓扑群的**正规子群**类似定义.

全体 n 级实正交矩阵组成的集合 $O(n)$是群 $GL(n,\boldsymbol{R})$的子群，称它为**正交群**. 给它以拓扑群 $GL(n,\boldsymbol{R})$的子空间拓扑，则$O(n)$成为拓扑群 $GL(n,\boldsymbol{R})$的子群. $O(n)$中行列式等于$+1$ 的矩阵全体构成拓扑群 $O(n)$的一个子群，称为**特殊正交群**，记作 $SO(n)$.

全体 n 级酉矩阵组成的**酉群** $U(n)$是拓扑群 $GL(n,\boldsymbol{C})$的子群. $U(n)$中行列式等于 1 的矩阵全体构成一个子群，称为**特殊酉群**，记作 $SU(n)$.

具有离散拓扑的整数全体所成的集合 $\boldsymbol{Z}$ 是实数轴 $\boldsymbol{R}$ 的一个子群.

拓扑群 G 的拓扑空间 G 一定是 Hausdorff 空间. 理由可参看邦德列雅金著《连续群(上册)》p. 106.

设 G 为拓扑群，$x\in G$. 由 x 确定的**左平移** L_x: $g\mapsto xg$ 对一切 $g\in G$，显然是双射. 由于它又是连续映射的合成映射：

$$G \to G \times G \xrightarrow{m} G,$$
$$g \mapsto (x,g) \mapsto xg,$$

所以 L_x 是连续的. $L_{x^{-1}}$ 是 L_x 的逆映射,因此 L_x 是同胚. 类似地,**右平移** R_x: $g \mapsto gx$, $\forall\, g \in G$,也是同胚.

这些平移的存在说明拓扑群是具有某种'齐性'的拓扑空间. 因为若 x 与 y 是拓扑群 G 的任意两点,则必有 G 的同胚 $L_{yx^{-1}}$ 将 x 映为 y. 因此,在 G 的每点,从局部来看呈现出相同的拓扑构造.

设 G 为拓扑群,K 为 G 的含有单位元素的连通分支. 则 K 是 G 的闭正规子群. 理由是:连通分支总是闭集. 对于任何 $x \in K$,集合 $Kx^{-1} := R_{x^{-1}}(K)$ 为连通(因为 $R_{x^{-1}}$ 是同胚),并且包含 $e = xx^{-1}$. 由于 K 是 G 内包含 e 的极大连通子集,因此必有 $Kx^{-1} \subseteq K$,从而 $KK^{-1} = K$. 这证明了 K 为 G 的子群. 正规性也从类似的考虑得出:对于任何 $g \in G$,集合 $gKg^{-1} = R_{g^{-1}}L_g(K)$ 为连通,并且包含 e,因此 $gKg^{-1} \subseteq K$.

在一个连通拓扑群内,单位元素的任一邻域是整个群的一组生成元. 理由如下:设 G 为连通拓扑群,V 为 e 在 G 内的一个邻域. 令 $H = \langle V \rangle$ 为 V 的元素在 G 内所生成的子群. 若 $h \in H$,则 h 的邻域 $hV = L_h(V)$ 包含于 H,故 H 是开集. 我们断言 H 的余集 $G-H$ 也是开集. 因为若 $g \in G-H$,考虑集合 gV. 若 $gV \cap H$ 不空,设 $x \in gV \cap H$,则 $x = gv$, $v \in V$. 则 $g = xv^{-1} \in H$,矛盾! 因此 g 的邻域 $L_g(V) = gV$ 包含于 $G-H$,这说明 $G-H$ 为开集. 由假设 G 连通,故不能划分为两个不相交的非空开集. 由于 H 非空,必然有 $G-H = \varnothing$,即 $G = H$.

设 X 为拓扑空间,$\mathscr{P}$ 为 X 的一族互不相交的非空子集,使得 $\bigcup_{P \in \mathscr{P}} P = X$. 这样的一个族 $\mathscr{P}$ 叫做 X 的一个划分. 按照下述方式造一个新空间 Y,叫做**粘合空间**. Y 的点是 $\mathscr{P}$ 的成员,并且若 π: $X \to Y$ 将 X 的每点送到所属的 $\mathscr{P}$ 中成员,而 Y 的拓扑是使 π 为

连续的最大的拓扑. 于是 Y 的子集 O 为开集，当且仅当 $\pi^{-1}(O)$ 在 X 内为开集. 这个拓扑叫做 Y 上的**粘合拓扑**. 我们可以把 Y 看作是从空间 X 出发，把属于 $\mathscr{D}$ 的每一子集粘合为一点而形成的空间.

设 Y 为如上定义的粘合空间，Z 为任意拓扑空间. 则映射 f: $Y\to Z$ 连续，当且仅当合成映射 $f\pi$: $X\to Z$ 为连续（证明参见本节开始指出的参考书《基础拓扑学》. 本小节凡未给出证明的结论，其证明均可参看《基础拓扑学》）.

设 f: $X\to Y$ 为满映射，并且设 Y 上的拓扑是使 f 为连续的最大拓扑，则我们称 f 为**粘合映射**，其理由如下：任何映射 f: $X\to Y$ 给出 X 的一个划分，以子集 $f^{-1}(y)$ 为它的成员，其中 $y\in Y$. 设 Y_* 为相应于这个划分的粘合空间，π: $X\to Y_*$ 为相应的映射. 若 f 为粘合映射，则可以证明：

(i) 空间 Y 同胚于空间 Y_*；

(ii) 映射 g: $Y\to Z$ 为连续，当且仅当合成映射 gf: $X\to Z$ 连续.

设 f: $X\to Y$ 为连续满射. 若 f 把 X 的开集映为开集，或闭集映为闭集，则 f 为粘合映射.

设 f: $X\to Y$ 为连续满射. 若 X 为紧致，Y 为 Hausdorff，则 f 为粘合映射.

设 G 为拓扑群，N 为它的正规子群. 对于商群 G/N 给以粘合拓扑（相应的对 G 的划分由 G 关于 N 的陪集组成）则 G/N 成为拓扑群.

例如，商群 $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ 给以粘合拓扑得到一个拓扑群，它同构于单位圆周 S^1. 这是因为由 $f(x)=e^{2\pi i x}$ 定义的映射 f: $\boldsymbol{R}\to S^1$ 把开集映为开集，它又是连续满射，因此 f 是一个粘合映射. $\boldsymbol{R}$ 的两个点被 f 粘合为一，当且仅当它们之差是整数，从而它们属于 $\boldsymbol{Z}$ 的同一个陪集. 因此空间 $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ 同胚于 S^1. 容易验证这个同胚是群同构. 所以拓扑群 $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ 与 S^1 同构.

1.3 紧致群

定义 7 拓扑群称为**紧致的**，如果它作为拓扑空间是紧致的．紧致拓扑群简称为**紧致群**，或**紧群**．

紧致群的例子

1．配备离散拓扑的任意有限群．

2．紧致群的任一闭子群(因为紧致空间的闭子集是紧致的)．

3．$O(n)$和$\mathrm{SO}(n)$．理由如下：为了证$O(n)$紧致，只要证明当$M_n(\boldsymbol{R})$等同于$\boldsymbol{E}^{n^2}$时，$O(n)$相应于$\boldsymbol{E}^{n^2}$内的一个有界闭集．设$A\in O(n)$，我们有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{kj} = \delta_{ik}, \quad 1 \leqslant i,k \leqslant n.$$

对于i,k的任意一组选择，定义映射$f_{ik}: M_n(\boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{E}^1$为

$$f_{ik}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{kj}.$$

则$O(n)$为下列各集合的交集

$$f_{ik}^{-1}(0), \quad 1 \leqslant i,k \leqslant n,\ i \neq k,$$
$$f_{ii}^{-1}(1), \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

由于$f_{ik}(1\leqslant i,k\leqslant n)$都是连续映射，所以上述每个集合都是闭集．因此$O(n)$是$M_n(\boldsymbol{R})$的闭集．

至于$O(n)$的有界性，只需注意条件

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{ij} = 1,$$

这蕴含任意正交矩阵A的元素满足$|a_{ij}|\leqslant 1$．这就证明了$O(n)$紧致．

$\mathrm{SO}(n)$是$O(n)$的闭集(因为$\det: O(n)\to \boldsymbol{E}^1$是连续映射，而$\{1\}$是$\boldsymbol{E}^1$的闭集，$\mathrm{SO}(n)=\det^{-1}(1)$)，所以也紧致． ▌

注意拓扑群$\mathrm{SO}(2)$与S^1同构，这只要将行列式为$+1$的2级正交矩阵

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

对应于 S^1 的点 $e^{i\theta}$就得到这个同构.

4. $U(n)$和 $SU(n)$. 类似于 3 的方法可证 $U(n)$和 $SU(n)$紧致.

拓扑群 SU(2)与 3 维球面 S^3 同构. 理由如下：令

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SU(2).$$

因为 $g\bar{g}^T = I$，所以 $\bar{g}^T = g^{-1}$. 于是得到 SU(2)内任一矩阵 g 有如下形式

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \tag{1}$$

反之，如果 g 是一个形如(1)的矩阵，那么显然 $g \in SU(2)$. 因此，群 SU(2)的每个元素由满足条件 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ 的一对复数 α, β 唯一确定. 如果我们令 $\alpha = a_1 + ia_2, \beta = b_1 + ib_2$，其中 $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \boldsymbol{R}$，$i = \sqrt{-1}$，那么条件 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ 可以写成

$$a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1.$$

让 g 对应于(a_1, a_2, b_1, b_2)，这给出了 SU(2)到 S^3 的一个映射. 显然它是双射. 易验证它是群同构(S^3 的群结构是四元数的乘法). 可证它是同胚. 因此拓扑群 SU(2)与 S^3 同构.

群 $SO(3) \cong SU(2)/\{\pm I\}$，其中 I 是 2 级单位矩阵. 在 SO(3) 内每个旋转恰好对应于 SU(2)内的两个酉变换 g 和 $-g$. 证明可参看阿·伊·柯斯特利金(A. I. Kostrikin)著的《代数学引论(下册)》p. 6～8. 本章 §7 将给出另一证法.

拓扑群 SO(3)与 3 维实射影空间 $\boldsymbol{R}(P^3)$同构. 其理由为：上面已指出 SU(2)与 S^3 同构. 而 $\boldsymbol{R}(P^3)$可以如下得到：把 S^3 的点划分成子集，每个子集包含一对对径点(一条直径的两个端点)，由此而得的粘合空间就是 $\boldsymbol{R}(P^3)$. 由于 SO(3)的每个旋转恰好对应于 SU(2)内的两个酉算子 g 和 $-g$，而 g 和 $-g$ 又分别对应于 S^3 内

的一条直径的两个端点，这两点粘合在一起成为$\boldsymbol{R}(P^3)$的一个点，因此SO(3)内每个旋转对应于$\boldsymbol{R}(P^3)$内一个点. 由于$S^3\cong$SU(2)，并且SU(2)到SO(3)有一个连续满同态，所以S^3到SO(3)有一个连续满同态f，核为$\{(1,0,0,0),(-1,0,0,0)\}$. 于是SO(3)$\cong S^3/\{(1,0,0,0),(-1,0,0,0)\}$，这是群同构. 前面已经指出，$S^3/\{(1,0,0,0),(-1,0,0,0)\}$配备以粘合拓扑后是$\boldsymbol{R}(P^3)$. 因此$\boldsymbol{R}(P^3)\cong$SO(3). 由粘合拓扑的定义知道，$\boldsymbol{R}(P^3)$到SO(3)的同构映射是连续的. 由于$\boldsymbol{R}(P^3)$紧致，而且SO(3)为Hausdorff，因此这映射是同胚. 这样我们证明了拓扑群SO(3)与$\boldsymbol{R}(P^3)$同构. ▌

若H和K是拓扑群G的两个紧致子集，则它们的群乘积HK也是紧致的. 理由是：因为H和K紧致，所以$H\times K$紧致. 因为群的乘法m为连续，所以它在$H\times K$上的限制也连续. 由紧致空间的连续像仍紧致，即得HK紧致.

设G为拓扑群，H为它的闭子群. 如果空间G是紧致的，那么空间H与G/H也是紧致的. 理由是：因为紧致空间的闭子集是紧致的，所以H紧致. 因为自然映射π: $G\to G/H$是连续的，所以G/H紧致.

设G为拓扑群，H为它的紧致子群. 如果$A\subset G/H$是紧致的，那么集合$B=\pi^{-1}(A)$也是紧致的. 特别，如果空间G/H是紧致的，那么G是紧致的. 证明可参看邦德列雅金著的《连续群(上册)》p. 120～121.

1.4 拓扑群的同态

定义8 设拓扑群G到拓扑群G^*内的映射f满足：(i) f是G到G^*内的群同态；(ii) f是拓扑空间G到拓扑空间G^*内的连续映射；那么就称f是拓扑群G到拓扑群G^*内的**同态映射**或**同态**. 如果f还是拓扑空间G到G^*内的开映射，那么称f为**开同态**.

在拓扑群的理论中，开的与不开的同态之间的区别是很重要

的. 那就是，开同态是抽象群的同态概念在拓扑群上的自然推广.

设 G 为拓扑群，N 为它的正规子群，G/N 为商群. 自然映射 $\pi: G\to G/N$ 就是拓扑群 G 到拓扑群 G/N 上的开同态. 这从粘合拓扑的定义可以知道.

设 G 与 G^* 均为拓扑群，f 是从 G 到 G^* 上的开同态，同态的核为 N. 则 N 为拓扑群 G 的闭正规子群，并且拓扑群 G^* 与拓扑群 G/N 同构. 理由如下：从抽象群的同态基本定理已经知道：N 是群 G 的正规子群，并且群 G^* 与 G/N 同构. 由于 N 是一个元素 e^* 在连续映射 f 之下的原像，所以 N 是拓扑空间 G 的闭集. 易证拓扑空间 G^* 和 G/N 同胚.

紧致群 G 到拓扑群 G^* 上的同态映射一定是开的. 理由：利用邦德列雅金著的《连续群(上册)》p. 127 的定理 12.

设 G 为紧致群，H 是 G 的闭子群，N 是 G 的正规子群，则 $H\cap N$ 是拓扑群 H 的正规子群，并且拓扑群 HN/N 与拓扑群 $H/(H\cap N)$ 同构. 这从上面两段立即得到.

习　题　6.1

1. 设 G 是拓扑群，F 是 G 的闭集. 则对于任意 $a\in G$，Fa，aF，F^{-1}都是闭集.

2. 设 G 是拓扑群，U 是 G 的开集. 则对于 G 的任意子集 P，有 UP，PU，U^{-1}是开集.

3. 设 G 是拓扑群，A，B 是 G 的子集. 则 $\overline{A}\,\overline{B}\subseteq\overline{AB}$.

(提示：任取 $x\in\overline{A}$，$y\in\overline{B}$. 设 W 是 xy 的任一邻域. 因为 G 的乘法连续，所以存在 x 的邻域 V_1 与 y 的邻域 V_2 使得 $V_1V_2\subseteq W$. 因为 $x\in\overline{A}$，所以 $V_1\cap A\neq\varnothing$. 于是有 $a\in V_1\cap A$. 同理有 $b\in V_2\cap B$. 于是 $ab\in W\cap AB$. 从而 $xy\in\overline{AB}$.)

4. 设 G 为拓扑群. 若 H 为 G 的子群，则 $\overline{H}$ 也是子群，并且若 H 为正规子群，则 $\overline{H}$ 也是.

(提示：对于 a，$b\in\overline{H}$，去证 $ab^{-1}\in\overline{H}$. 设 W 是 ab^{-1}的任一邻

域，去证 W 与 H 相交.）

5. 群 G 配备以离散拓扑，所成的拓扑群称为离散群. 证明紧致离散群一定是有限群.

6. 设 H 为拓扑群 G 的离散子群(即 H 为群 G 的子群，并且当给以子空间拓扑时是离散空间). 找出 e 在 G 内的一个邻域 N，使得平移像 $hN=L_h(N)$，$h\in H$，互不相交.

7. 若 K 为拓扑群 G 的紧致子集，H 为 G 的离散子群，证明 $H\cap K$ 为有限集.

8. 证明：单位圆周的任何非平凡的离散子群是有限循环群.

9. 证明：$\boldsymbol{R}$ 的任何非平凡的离散子群是无限循环群.

10. 证明：正交群 $O(n)$ 不连通.

11. 设 $A,B\in O(2)$，并且 $\det A=+1$，$\det B=-1$. 证明：

$$B^2=I,\quad BAB^{-1}=A^{-1}.$$

由此导出 $O(2)$ 的离散子群或为循环群，或为二面体群.

12. 若 σ 为拓扑群 $\boldsymbol{R}$ 的一个自同构，证明：对于任何有理数 r，有 $\sigma(r)=r\sigma(1)$. 由此导出，对于任何实数 x，有 $\sigma(x)=x\sigma(1)$，从而得知 $\boldsymbol{R}$ 的自同构群同构于 $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{Z}_2$.

§2 拓扑群的线性表示

本节中域 K 指复数域 $\boldsymbol{C}$ 或实数域 $\boldsymbol{R}$，除非特别声明.

定义 1 设 V 是域 K 上的有限维向量空间，拓扑群 G 到拓扑群 $\mathrm{GL}(V)$ 的任一同态 φ 称为拓扑群 G 的一个**线性表示**(简称为 G 的一个 **K-表示**)，V 称为**表示空间**或者 **G-空间**，V 的维数称为表示 φ 的**次数**.

拓扑群 G 的线性表示比抽象群 G 的线性表示增加了"φ 是连续映射"的要求，因此拓扑群 G 的线性表示也称为群 G 的**连续表示**.

如果(φ,V)是拓扑群 G 的 K-表示，则可得到群 G 在 V 上的一

个线性作用，并且易证这个作用是连续的，即，由$(g,v)\mapsto\varphi(g)v$定义的映射$G\times V\to V$是连续映射. 这时称V是一个**连续G-模**.

反之，设G是拓扑群，如果K上有限维向量空间V是连续G-模(即，G在V上有一个连续的线性作用)，则V提供了拓扑群G的一个K-表示.

定义 2 拓扑群G到拓扑群$\mathrm{GL}(n,K)$的一个同态Φ称为拓扑群G的一个n次**矩阵表示**.

设Φ是群G的n次矩阵表示，设$\Phi(g)=(a_{ij}(g))$，$\forall\ g\in G$. 显然，a_{ij}是G上的函数，$1\leqslant i,j\leqslant n$，称它们为$\Phi$的**矩阵元素**或**坐标函数**.

如果Φ是拓扑群G的n次矩阵表示，则矩阵元素$a_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant n)$是连续函数. 其理由如下：把$M_n(K)$等同于$K^{n^2}$，对于$A\in M_n(K)$，投影映射$\pi_{ij}$：$M_n(K)\to K^1$将$A$映为它的$(i,j)$元. 因为$\pi_{ij}$是连续的，所以它在$\mathrm{GL}(n,K)$上的限制也是连续的. 又因为$\Phi$是$G$到$\mathrm{GL}(n,K)$的连续映射，所以$\pi_{ij}\Phi$是$G$到$K^1$的连续映射. 而且$(\pi_{ij}\Phi)(g)=a_{ij}(g)$，$\forall\ g\in G$，所以$a_{ij}=\pi_{ij}\Phi$为$G$上的连续函数.

反之，设G是拓扑群，Φ是抽象群G的n次矩阵表示. 如果矩阵元素$a_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant n)$是$G$上的连续函数，那么$\Phi$是拓扑群$G$的$n$次矩阵表示. 理由如下：$\Phi$连续，当且仅当所有的合成映射

$$G\xrightarrow{\Phi}\mathrm{GL}(n,K)\subseteq K^1\times\cdots\times K^1$$

为连续. 由题设，后者成立，所以Φ连续.

从上面两段话看出：拓扑群G的n次矩阵表示比抽象群G的n次矩阵表示恰好多了一条要求："Φ的矩阵元素是G上的连续函数".

例子

1. 抽象群G的每一个K-表示是离散拓扑群G的K-表示.

2. 设$G=\mathrm{GL}(n,K)$，$V=M_n(K)$，φ定义如下：

$\varphi(A)X=(A^{-1})'XA^{-1},\quad A\in\mathrm{GL}(n,K),X\in M_n(K).$

易验证对于每个 $A\in \mathrm{GL}(n,K)$，$\varphi(A)$是向量空间 V 上的线性变换，并且是可逆的. 易验证 φ是 G 到 $\mathrm{GL}(V)$的群同态. 因此 φ是群 $\mathrm{GL}(n,K)$的 n^2 次线性表示. 下面进一步证明 φ是拓扑群 $\mathrm{GL}(n,K)$的 n^2 次线性表示，这只需再证 φ是 $\mathrm{GL}(n,K)$到 $\mathrm{GL}(V)$的连续映射. 考虑相应的 n^2 次矩阵表示 Φ. 在 V 中取一个基：$E_{11},\cdots,E_{1n},E_{21},\cdots,E_{2n},\cdots,E_{n1},\cdots E_{nn}$. 对于 $A\in \mathrm{GL}(n,K)$，设 A,A^{-1}的(i,j)元分别为 $a_{ij},\tilde{a}_{ij}$. 则

$$\begin{aligned}\varphi(A)E_{ij} &= (A^{-1})'E_{ij}A^{-1}\\ &= \tilde{a}_{i1}\tilde{a}_{j1}E_{11}+\cdots+\tilde{a}_{i1}\tilde{a}_{jn}E_{1n}+\cdots\\ &\quad+\tilde{a}_{in}\tilde{a}_{j1}E_{n1}+\cdots+\tilde{a}_{in}\tilde{a}_{jn}E_{nn}.\end{aligned}$$

于是 Φ 的矩阵元素形如 $\tilde{a}_{ik}\tilde{a}_{jl}$. 又由于 $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}A^*$，而 A^* 的元素是 A 的元素的多项式，$\det A$ 的元素也是 A 的元素的多项式，且 $\det A\neq 0$，因此 Φ 的矩阵元素是 G 上的连续函数，从而 Φ 是拓扑群 $\mathrm{GL}(n,K)$的 n^2 次矩阵表示. ▎

第一章讲了忠实的表示；平凡的表示；主表示（或单位表示）；表示的等价；G 不变子空间；子表示；商表示；表示的直和；表示的提升；共轭表示；逆步表示；不可约表示；可约表示；完全可约表示；酉表示；正交表示等概念和有关结论，这些（只要没有加上"有限群"的条件）对于拓扑群都适用. 此外，第一章 §2 中"线性表示和群同态的合成"对于拓扑群来说，应将"群同态"改成"拓扑群的同态"；类似地，"通过群自同构的挠表示"中"群自同构"修改成"拓扑群的自同构".

第一章 §5 的定理 1.5.2 对于拓扑群也成立，即，我们有：abel 拓扑群的每一个不可约复表示都是 1 次的.

第四章 §2 "表示的张量积"对于拓扑群仍然适用，即，若(φ,V)和(ψ,W)是拓扑群 G 的两个线性表示，按第四章 §2 讲的方法可得到抽象群 G 的张量积表示$(\varphi\otimes\psi,V\otimes_K W)$. 从 $\varphi\otimes\psi$ 提供的矩阵表示可看出，矩阵元素是 G 上的连续函数，从而 $\varphi\otimes\psi$ 是拓扑

群 G 的表示.

在第二章中我们已经看到 Schur 引理在研究有限群的不可约表示中起了非常重要的作用. 同样地,在研究拓扑群(特别是紧致群)的不可约表示中,Schur 引理也起着关键的作用. 我们在第二章讲 Schur 引理时使用的是模的语言,现在我们用群表示的语言再叙述一下 Schur 引理并且再证明一遍.

Schur 引理 设 (φ,V) 和 (ψ,W) 是群 G 的两个不可约 K-表示,其中 K 是代数封闭域. 设 σ 是域 K 上有限维向量空间 V 到 W 的一个线性映射使得

$$\psi(g)\sigma = \sigma\varphi(g), \quad \forall g \in G, \tag{1}$$

(i) 如果 φ 和 ψ 不等价,则 $\sigma=0$;

(ii) 如果 $V=W$ 并且 $\varphi=\psi$,则 $\sigma=\lambda 1_V$,其中 λ 是 K 中某个元素.

证明 因为对一切 $g\in G$ 有 $\psi(g)\sigma=\sigma\varphi(g)$,所以 $\mathrm{Ker}\sigma$ 是 V 的 G 不变子空间,而 $\mathrm{Im}\sigma$ 是 W 的 G 不变子空间. 由于 (φ,V) 和 (ψ,W) 都不可约,所以只有两种可能的情形

(1) $\mathrm{Ker}\sigma=0$,并且 $\mathrm{Im}\sigma=W$;

(2) $\mathrm{Ker}\sigma=V$,并且 $\mathrm{Im}\sigma=0$.

在情形(1),σ 是 V 到 W 上的同构. 在情形(2),$\sigma=0$.

(i) 若 $\sigma\neq 0$,则 σ 是 V 到 W 上的同构,又由(1)式知道,$\varphi\approx\psi$.

(ii) 若 $V=W$ 并且 $\varphi=\psi$,则 σ 是 V 的线性变换. 因为 K 是代数封闭域,所以 σ 有特征值 λ. 由(1)式得

$$(\sigma-\lambda 1_V)\varphi(g) = \varphi(g)(\sigma-\lambda 1_V) \quad \forall g \in G. \tag{2}$$

于是 $\sigma-\lambda 1_V$ 或者是 V 的自同构,或者等于 0. 设 α 是 σ 的属于 λ 的特征向量,则 $(\sigma-\lambda 1_V)\alpha=0$. 这表明 $\mathrm{Ker}(\sigma-\lambda 1_V)$ 不为 0. 因此必定有 $\sigma-\lambda 1_V=0$,即,$\sigma=\lambda 1_V$. ▌

注意,Schur 引理的(i)对于任意域 K 都成立.

在本章 § 5 我们将看到 Schur 引理对于研究紧致群的不可约

表示的重要作用.

第三章讲的表示提供的特征标的概念对于拓扑群的 K-表示仍然适用. 对于拓扑群 G,特征标是 G 上的连续函数. 第三章 §1 讲的特征标的基本性质对于拓扑群的 K-表示仍成立,除非加了"有限群"的条件. 第四章 §2 讲的张量积表示的特征标的性质对于拓扑群也成立.

群表示论的基本问题是要描绘给定的一个群在一个给定的域上的所有有限维线性表示. 由于群 G 的有限维完全可约表示一定可分解成有限多个不可约子表示的直和,因此,如果群 G 的每一个有限维线性表示都是完全可约的话,那么就把问题归结为研究群 G 的所有不可约表示. 在第一章 §3 我们证明了有限群 G 在特征不能整除 $|G|$ 的域上的每一个有限维线性表示是完全可约的(即,Maschke 定理). 我们将把这个结论推广到紧致群上. 注意到 Maschke 定理的证明的关键是"在 G 上取平均". 现在一般的紧致群都是无限群,自然的想法是将"在 G 上取平均"用"在 G 上积分"代替. 在下一节我们在紧致群上建立一种不变积分.

习 题 6.2

1. 设 $G=\mathrm{GL}(n,K)$,$V=M_n(K)$,φ 定义如下:

$$\varphi(A)X = AXA^{-1}, \quad A \in \mathrm{GL}(n,K), X \in M_n(K).$$

证明: φ 是拓扑群 $\mathrm{GL}(n,K)$ 的 n^2 次线性表示.

2. 证明: 拓扑群 G 的 K-表示 (φ,V) 的子表示是连续的.

§3 紧致群上的不变积分

定义 1 设 G 为紧致群,如果对于每一个定义在 G 上的连续实值函数 f 对应有一个实数,记作 $\int_G f(x)\mathrm{d}x$,使得映射 $f \mapsto \int_G f(x)\mathrm{d}x$ 具有下列性质:

1) $\int_G (a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x))\mathrm{d}x = a_1 \int_G f_1(x)\mathrm{d}x + a_2 \int_G f_2(x)\mathrm{d}x$（线性）；

2) 如果 f 到处非负而且不恒等于零，那么我们有

$$\int_G f(x)\mathrm{d}x > 0 \text{（正定性）；}$$

3) 对于每个 $g \in G$，有 $\int_G f(gx)\mathrm{d}x = \int_G f(xg)\mathrm{d}x = \int_G f(x)\mathrm{d}x$（不变性）；

4) $\int_G 1\mathrm{d}x = 1$（规范性）；

那么我们称在紧致群 G 上建立了**不变积分**.

例子

1. 有限群 G 上的不变积分由下面的公式定义

$$\int_G f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G} f(x).$$

2. 圆周 S^1 上的不变积分由下面的公式定义

$$\int_{S^1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta.$$

3. 因为 SU(2)同构于 S^3，所以在 SU(2)上的不变积分可以定义成在 3 维球面上对于通常测度的积分乘以 $(2\pi^2)^{-1}$.

4. 设 G 是紧致群，N 是 G 的闭正规子群. 显然商群 G/N 也是紧致群(因为紧致空间的连续像是紧致的). G/N 上的不变积分能够通过 G 上的不变积分来定义：

$$\int_{G/N} f(y)\mathrm{d}y = \int_G \tilde{f}(x)\mathrm{d}x,$$

其中 f 是 G/N 上的连续实值函数，$\tilde{f}$ 的定义为：

$$\tilde{f}(x) := f(xN), \quad \forall\, x \in G.$$

利用这个方法我们能够定义 SO(3)上不变积分，因为我们在§1.3曾指出 $\mathrm{SO}(3) \cong \mathrm{SU}(2)/\{I, -I\}$.

本节的主要结果是：

定理 6.3.1 在每一个紧致群 G 上可以建立不变积分，而且只有一种方法建立不变积分.

我们将通过几个引理来完成这个定理的证明. 先引入一些符号.

设 f 为定义在紧致群 G 上的连续实值函数；$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 是 G 中的元素组，在这些元素中可以有相同的. 令

$$M(A,f;x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{f(xa_i)}{m}. \tag{1}$$

由等式(1)所定义的变量 $x\in G$ 的函数 $M(A,f)$ 是连续的，它是 G 上不变积分结构的基础. 由于 G 是紧致空间，所以 $M(A,f)$ 是有界的，并且能达到它的上下确界. 用 $K(M(A,f))$ 表示函数 $M(A,f)$ 的最小值，而以 $L(M(A,f))$ 表示最大值. 令 $S(M(A,f))=L(M(A,f))-K(M(A,f))$，称它是函数 $M(A,f)$ 的振幅. 连续函数 f 的最小值、最大值、振幅用相应的符号 $K(f)$、$L(f)$、$S(f)$ 表示. 容易验证下列关系式成立：

$$K(M(A,f))\geqslant K(f), \tag{2}$$

$$L(M(A,f))\leqslant L(f), \tag{3}$$

$$S(M(A,f))\leqslant S(f). \tag{4}$$

容易验证，若 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 与 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ 为 G 中的两个元素组，则

$$M(A,M(B,f))=M(AB,f), \tag{5}$$

其中 $AB=\{a_ib_j\mid i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n\}$ 是 G 中的元素组.

引理 6.3.1 设 G 为紧致群，f 是定义在 G 上的非常数的连续实值函数，则在 G 中存在有限的元素组 A，使得

$$S(M(A,f))<S(f). \tag{6}$$

证明 设 k,l 分别为函数 f 的最小、最大值. 由题设知 $k<l$. 因为 f 连续，所以存在 G 内的开集 U，使得当 $x\in U$ 时有

$$k<f(x)<h<l.$$

形如 $Ua^{-1}(a\in G)$ 的所有开集的集合覆盖 G. 由于 G 紧致，所以存

在 G 中有限的元素组 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，使得开集组 $Ua_i^{-1}(i=1,2,\cdots,m)$ 覆盖 G. 对每一 $x\in G$，存在 j 使得 $x\in Ua_j^{-1}$，于是 $xa_j\in U$，从而 $f(xa_j)<h$. 因此

$$M(A,f;x)<\frac{1}{m}[(m-1)l+h]<l.$$

由此得出 $L(M(A,f))<l$. 又有 $K(M(A,f))\geqslant k$，于是(6)式成立. ▍

拓扑群 G 的元素组成拓扑空间，因此可以讨论定义在 G 上的连续实值函数. 然而 G 为群这一事实使我们可能把连续性的定理写得稍为不同一点.

设 G 为拓扑群，M 为 G 的某一子集. 定义在空间 M 上的实值函数 f 在点 $a\in M$ 处连续的充分必要条件是：对于任给的正数 ε，存在 G 的单位元素的邻域 V，使得当 $x\in M$，$xa^{-1}\in V$ 时，恒有 $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

定义 2 设 M 为拓扑群 G 的某一子集，f 为定义在 M 上的实值函数. 如果对每一正数 ε，存在有单位元素的邻域 V，使得当 $xy^{-1}\in V$ 并且 $x,y\in M$ 时，恒有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$，那么称 f 为**均匀(或一致)连续的函数**.

定义 2′ 设 f 为定义在拓扑群 G 的子集 M 上的实值函数. 如果对于每一正数 ε，存在有单位元素的邻域 V'，使得当 $x^{-1}y\in V'$ 并且 $x,y\in M$ 时，恒有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$，那么称 f 为**均匀(或一致)连续的函数**.

关于均匀连续函数的上述两个定义一般说是不等价的，然而在所有重要的情况下，它们是等价的. 显然，均匀连续函数是连续函数.

命题 6.3.1 设 G 为拓扑群，M 为它的紧致子集. 那么定义在 M 上的连续函数 f 自动地是在上述两种意义下的均匀连续函数.

证明 设 ε 为任意正数. 因为 f 连续，所以对于 M 中每一点 a 存在有 G 的单位元素的邻域 V_a，使得当 $xa^{-1}\in V_a$ 并且 $x\in M$ 时

有 $|f(x)-f(a)|<\varepsilon/2$. 因为 $ee=e$,所以对于 e 的邻域 V_a,存在 e 的邻域 W_a 使得 $W_aW_a\subseteq V_a$. 显然,形如 $W_aa(a\in M)$的所有开集组成集合 M 的覆盖. 由于 M 是紧致的,我们可以从这个覆盖中选取出有限个开集覆盖 M. 因此存在 M 中有限个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 使得开集组 $W_{a_i}a_i(i=1,2,\cdots,n)$覆盖 M. 以 V 表示所有开集 W_{a_i}的交集,则 V 是 e 的邻域. 设 $xy^{-1}\in V$ 且 $x,y\in M$. 因为开集组$W_{a_i}a_i$覆盖 M,所以存在数 k,使得 $ya_k^{-1}\in W_{a_k}$. 于是 $|f(y)-f(a_k)|<\varepsilon/2$. 其次,我们有 $xa_k^{-1}=xy^{-1}ya_k^{-1}\in VW_{a_k}\subseteq W_{a_k}W_{a_k}\subseteq V_{a_k}$,所以 $|f(x)-f(a_k)|<\varepsilon/2$. 由此得出 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 这就证明了 f 是定义 2 意义下的均匀连续函数. 类似地可证 f 是定义 2′意义下的均匀连续函数. ▌

定义 3 设 M 为拓扑群 G 的某一子集. 设 Δ 为定义在 M 上的实值函数的某一集合. 如果对于任一正数 ε 存在有 G 的单位元素的邻域 V,使得当 $xy^{-1}\in V$ 并且 $x,y\in M$ 时,对于 Δ 中每一函数 f 恒有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$,那么称 Δ 为**均匀(或一致)连续的函数组**. 显然在均匀连续的函数组中的每一函数都是均匀连续的. 如果对函数组 Δ 存在有数 m,使得当 $x\in M,f\in\Delta$ 时,恒有 $|f(x)|<m$,则称 Δ 为**均匀(或一致)有界**.

定义 4 设 $f_n(n=1,2,\cdots)$为定义在集合 M 上的实值函数序列,f 为定义在集合 M 上的实值函数. 如果对于每一正数 ε 存在自然数 m,使得当 $n>m$ 时,$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ 对于任何 $x\in M$ 都成立,那么称函数序列 f_n **均匀(或一致)收敛**于函数 f.

定义在集合 M 上的实值函数序列 $f_n(n=1,2,\cdots)$为均匀收敛的充要条件是:对于每一正数 ε 存在有充分大的自然数 m,使得当 $p>m,q>m$ 时,$|f_p(x)-f_q(x)|<\varepsilon$ 对每一个 $x\in M$ 都成立.

如果连续实值函数的序列均匀收敛,则它的极限函数也是连续函数.

命题 6.3.2 设 M 为拓扑群 G 的紧致子集. 定义在 M 上的均匀收敛的连续实值函数序列 $f_1,f_2,\cdots$一定是均匀连续的,而且

是均匀有界的.

证明 设 f 为序列 $f_1,f_2,\cdots$ 的极限函数. 因为 M 是紧致的，所以从 f 连续可得出 f 均匀连续. 因此对于任给正数 ε 存在有 G 的单位元素的邻域 V，使得当 $xy^{-1}\in V$ 并且 $x,y\in M$ 时，有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon/3$. 另一方面，由题设得，存在充分大的数 p，使得当 $n>p$ 时，有

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon/3,\quad |f(y)-f_n(y)|<\varepsilon/3.$$

由此得出，当 $x,y\in M,xy^{-1}\in V$ 以及 $n>p$ 时，有 $|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon$. 其次，以 $V_i(i=1,2,\cdots,p)$ 表示满足下列条件的单位元素的邻域：当 $x,y\in M$ 并且 $xy^{-1}\in V_i$ 时，有 $|f_i(x)-f_i(y)|<\varepsilon$（因为 f_i 连续，所以它均匀连续）. 然后以 U 表示所有邻域 $V,V_1,\cdots,V_p$ 的交集，于是当 $x\in M,y\in M,xy^{-1}\in U$ 时，恒有不等式

$$|f_j(x)-f_j(y)|<\varepsilon,\quad j=1,2,\cdots.$$

因此序列 $f_1,f_2,\cdots$是均匀连续的. 它的均匀有界性是由于当$n>p$ 时，有 $|f_n(x)|<|f(x)|+\varepsilon/3$，而函数 $f,f_1,f_2,\cdots,f_p$ 是有界的.

∎

命题 6.3.3 设 G 为拓扑群，M 为 G 的紧致子集. 设 Δ 为定义在集合 M 上的均匀有界与均匀连续的函数组. 则在 Δ 的每一函数序列中总可以取出均匀收敛的子序列.

证明 设 ε 为任一正数，V_ε 为 G 中单位元素的邻域，它满足：当 $x,y\in M,xy^{-1}\in V_\varepsilon,f\in\Delta$ 时，有

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon. \tag{7}$$

其次，设 Δ' 为 Δ 的某一无限子集，又 $a\in M$. 于是存在 Δ' 的无限子集 Δ_a'，使得当 $x\in M,x\in V_\varepsilon a,f\in\Delta_a',g\in\Delta_a'$ 时，有

$$|f(x)-g(x)|<3\varepsilon. \tag{8}$$

这一步的理由为：由于 Δ' 的均匀有界性，此集合中每一函数在 a 点的函数值都一定在一有界区间上，所以存在一个长为 ε 的区间 I，使得 Δ' 中有无限子集 Δ_a'，在 Δ_a' 中所有函数在 a 点的函数值都属于 I. 因此当 $f\in\Delta_a',g\in\Delta_a'$ 时，有

$$|f(a)-g(a)|<\varepsilon. \tag{9}$$

此外，由于(7)，当 $x\in M, x\in V_\varepsilon a, f\in \Delta_a', g\in \Delta_a'$ 时，有

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon, \quad |g(x)-g(a)|<\varepsilon. \tag{10}$$

从(9)和(10)得出(8)。

当 a 跑遍 M 时，形如 $V_\varepsilon a$ 的所有开集所成的集合覆盖 M. 由于 M 紧致，所以可以从中选出有限覆盖 $V_\varepsilon a_1, \cdots, V_\varepsilon a_r$. 由前面所证的结果，当 $a=a_1$ 时，Δ' 中存在无限子集 Δ_{a_1}' 满足条件(8). 同样，在 Δ'_{a_1} 中可取出无限子集 Δ'_{a_1,a_2}，它满足：当 $x\in M, x\in V_\varepsilon a_2, f\in \Delta'_{a_1,a_2}, g\in \Delta'_{a_1,a_2}$ 时，有

$$|f(x)-g(x)|<3\varepsilon.$$

继续这样的过程，我们可以得到集合 $\Delta'_{a_1,a_2,\cdots,a_r}$，它满足：当 $x\in M$, $f\in \Delta'_{a_1,a_2,\cdots,a_r}, g\in \Delta'_{a_1,a_2,\cdots,a_r}$ 时，有

$$|f(x)-g(x)|<3\varepsilon. \tag{11}$$

记 $\Delta_\varepsilon'=\Delta'_{a_1,a_2,\cdots,a_r}$.

现在设 $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$ 是 Δ 中某一函数序列. 以 Δ' 表示这个序列中所有函数所成的集合. 假如 Δ' 是有限的，那么命题显然成立(从 Δ' 中取一个函数组成一个子序列，则这个子序列均匀收敛到它自身). 下设 Δ' 是无限集，并且给出收敛于零的正数序列 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n, \cdots$. 由上面所证的，从 Δ' 中可以取出无限子集 $\Delta'_{\varepsilon_1}=\Delta_1'$，当 $\varepsilon=\varepsilon_1$ 时，它满足条件(11). 同样，从 Δ_1' 中可以选出无限子集 Δ_2'，它满足条件：

当 $x\in M, f\in \Delta_2', g\in \Delta_2'$ 时，有 $|f(x)-g(x)|<3\varepsilon_2$.

继续这样的过程，我们做出序列

$$\Delta_1' \supset \Delta_2' \supset \cdots \supset \Delta_n' \supset \cdots,$$

这些 Δ_n' 都是 Δ' 的无限子集，而且满足条件：

当 $x\in M, f\in \Delta_n', g\in \Delta_n'$ 时，有

$$|f(x)-g(x)|<3\varepsilon_n, \quad n=1,2,\cdots. \tag{12}$$

现在我们从 Δ_1' 中任意取出一函数 g_1；从 Δ_2' 中任意取出一函数

g_2,不过要求 g_2 在序列 $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$ 中的下标要超过 g_1 的下标;从 Δ_3' 中任取一个函数 g_3,其下标超过 g_2 的下标;以此类推. 这样所得的序列 $g_1, g_2, g_3, \cdots$ 是原序列的子序列,由于(12),它是满足均匀收敛的条件的. ▌

设 M 为紧致拓扑空间. 如果定义在 M 上的连续实值函数序列 $f_1, f_2, \cdots$ 均匀收敛于函数 f,那么我们有

$$\lim_{n\to\infty} K(f_n) = K(f),\ \lim_{n\to\infty} L(f_n) = L(f),\ \lim_{n\to\infty} S(f_n) = S(f).$$

设 G 为紧致群,在所有定义在 G 上的连续实值函数组成的集合 $C(G)$ 中可以自然地引入距离. 设 f, g 是 G 上的连续实值函数,则 $|f(x) - g(x)|$ 仍是 G 上的连续函数. 由于 G 是紧致的,因此 $|f(x) - g(x)|$ 有最大值. 令

$$d(f,g) = \max_{x\in G} |f(x) - g(x)|,$$

易验证 $d(f,g)$ 满足距离函数的三个条件. 于是 $C(G)$ 成为度量空间.

现在我们回到紧致群上建立不变积分的问题.

定义 5 设 f 是定义在紧致群 G 上的连续实值函数. 如果实数 p 具有下列性质:对每一正数 ε 存在 G 的有限元素组 A,使得对任一 $x \in G$ 有

$$|M(A, f; x) - p| < \varepsilon, \tag{13}$$

那么称这种数 p 为函数 f 的**右平均数**.

引理 6.3.2 每一个定义在紧致群 G 上的连续实值函数都至少有一个右平均数.

证明 设 f 为 G 上的一个连续实值函数. 设 A 为 G 中任一有限元素组,用 Δ 表示形如 $M(A, f)$ 的所有函数的集合. 从关系式(2)和(3)得出,Δ 是均匀有界的;我们来证 Δ 是均匀连续的.

因为 G 紧致,由 f 连续可推出 f 均匀连续. 因此对每一正数 ε 存在有单位元素的邻域 V,使得当 $xy^{-1} \in V$ 时,有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. 而如果 $xy^{-1} \in V$,那么 $(xa_i)(ya_i)^{-1} = xy^{-1} \in V$;所以也有 $|f(xa_i) - f(ya_i)| < \varepsilon$. 由此得出

$$|M(A,f;x)-M(A,f;y)|<\varepsilon.$$

当 $xy^{-1}\in V$ 以及 A 为任意有限元素组时，最后一个不等式总是成立. 因此，Δ 是均匀连续的函数组.

用 s 表示 Δ 中所有函数的振幅的下确界. 在 Δ 中存在函数的序列

$$f_1,f_2,\cdots,f_n,\cdots \tag{14}$$

使得 $\lim\limits_{n\to\infty}S(f_n)=s$. 因为 Δ 是均匀有界与均匀连续的，据命题 6.3.3，从序列(14)中可以选出均匀收敛的子序列

$$g_1,g_2,\cdots,g_n,\cdots, \tag{15}$$

并且以 g 表示这序列的极限. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}S(g_n)=S(g)$，所以 $S(g)=s$. 我们来证 g 为常数函数，或者即证 $s=0$.

如果 g 不是常数，据引理 6.3.1，存在 G 的有限元素组 A，使得

$$S(M(A,g))=s'<s. \tag{16}$$

取 $\varepsilon=\frac{s-s'}{3}$. 因为序列(15)均匀收敛于 g，所以存在自然数 k，使得 $|g(x)-g_k(x)|<\varepsilon$ 对一切 $x\in G$. 由此得出

$$|M(A,g;x)-M(A,g_k;x)|<\varepsilon. \tag{17}$$

从(16)和(17)得出 $S(M(A,g_k))\leqslant s'+2\varepsilon<s$. 由关系式(5)，函数 $M(A,g_k)$ 是属于 Δ 的，因此，我们得到了矛盾. 从而 g 是常数函数，即，$g(x)\equiv p$.

因为序列(15)均匀收敛于 g，所以对每一正数 ε 存在自然数 n，使得 $|g_n(x)-p|<\varepsilon$. 而 $g_n\in\Delta$，因此对每一正数 ε 存在有 G 中的有限元素组 A 满足不等式(13). ▌

设 f 是定义在紧致群 G 上的连续实值函数；$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ 是 G 的元素组. 令

$$M'(B,f;x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{f(b_jx)}{n}, \tag{18}$$

则得到变量 $x\in G$ 的新的函数 $M'(B,f)$. 可以直接验证

$$M(A,M'(B,f))=M'(B,M(A,f)). \tag{19}$$

如果实数 q 具有下列性质：对于每一正数 ε 存在 G 中的有限元素组 B，使得 $|M'(B,f;x)-q|<\varepsilon$ 对任意 $x\in G$ 都成立，则称 q 为函数 f 的**左平均数**. 每一个定义在紧致群 G 上的连续实值函数至少有一个左平均数. 为了证明这一点，在 G 中保持原有的拓扑，而引入新的乘法运算：$a\times b=ba$，得到新的拓扑群 G'. 不难看出，对 G' 而言的右平均数是对 G 而言的左平均数；因为右平均数的存在已证；所以这就证明了左平均数的存在.

引理 6.3.3 对于定义在紧致群 G 上的连续实值函数 f，只存在一个右平均数，并且也只存在一个左平均数，而且这两个平均数相等. 这样所得的一个唯一的平均数称为函数 f 的平均数，记作 $M(f)$.

证明 设 p 为函数 f 的某一右平均数，q 为 f 的某一左平均数. 于是满足关系式(13)和 $|M'(B,f;x)-q|<\varepsilon$. 在关系式(13)中以 b_jx 代替 x，按 j 从 1 加到 n，再除以 n，即得

$$|M'(B,M(A,f);x)-p|<\varepsilon. \tag{20}$$

类似的方法可得

$$|M(A,M'(B,f);x)-q|<\varepsilon. \tag{21}$$

从(20)、(21)和(19)得，$|p-q|<2\varepsilon$. 此不等式对一切正数 ε 都成立，所以 $p=q$. 因此每一右平均数等于每一左平均数. 这也就说明了 f 的左、右平均数都只有一个. ▍

引理 6.3.4 设 f 和 g 是定义在紧致群 G 上的两个连续实值函数，则

$$M(f+g)=M(f)+M(g). \tag{22}$$

证明 首先证明对于 G 中任意有限元素组 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ 有

$$M(M(B,f))=M(f). \tag{23}$$

设 $M(f)=p$. 于是 p 是 f 的左平均数. 对于任一正数 ε，存在 G 中有限元素组 C 使得 $|M'(C,f;x)-p|<\varepsilon$. 在此关系式中以 xb_j 代替 x，然后按 j 从 1 加到 n，再除以 n，即得

$$|M(B,M'(C,f);x)-p|<\varepsilon.$$

据(19),得

$$|M'(C,M(B,f);x)-p|<\varepsilon.$$

因此,p 是函数 $M(B,f)$的左平均数,所以(23)式成立.

现在设 $M(g)=q$. 于是 q 是 g 的右平均数,对任一正数 ε 存在 G 中有限元素组 B,使得 $|M(B,g;x)-q|<\varepsilon$. 从这个不等式得出 $|M(A',M(B,g);x)-q|<\varepsilon$,其中 A' 为任意有限元素组. 由于(5)式,得

$$|M(A'B,g;x)-q|<\varepsilon. \tag{24}$$

由于(23)式,p 是函数 $M(B,f)$的平均数,即存在 G 中有限元素组 A,使得 $|M(A,M(B,f);x)-p|<\varepsilon$,而由于(5),得

$$|M(AB,f;x)-p|<\varepsilon. \tag{25}$$

关系式(24)和(25)当 $A'=A$ 时就给出

$$|M(AB,f+g;x)-(p+q)|<2\varepsilon.$$

因此 $p+q$ 是函数 $f+g$ 的右平均数,这就证明了关系式(22). ▌

引理 6.3.5 设 f 为定义在紧致群 G 上的连续实值函数,a 为 G 中任一元素. 令 $f'(x)=f(xa)$,$f''(x)=f(ax)$. 那么

$$M(f')=M(f),\quad M(f'')=M(f).$$

证明 因为

$$M(A,f';x)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}f'(xa_i)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}f(xa_ia)$$
$$=M(Aa,f;x),\quad \forall\ x\in G.$$

所以 $M(A,f')=M(Aa,f)$. 由此关系式可以直接得出,函数 f' 与 f 的右平均数是一致的,因此 $M(f')=M(f)$. 同理,利用左平均数可以证明 $M(f'')=M(f)$.

引理 6.3.6 设 f 是定义在紧致群 G 上的连续实值函数,而且是非负的与不恒等于零的,则 $M(f)>0$.

证明 因为 G 紧致,且 f 连续,所以 f 有界且能达到上下确界. 选取 h 使 $h>0$ 且 h 小于 f 的上确界. 于是存在开集 $U\subset G$,使

得当 $x\in U$ 时有 $f(x)>h>0$. 形如 $Ua^{-1}(a\in G)$ 的所有开集组成 G 的覆盖，由于 G 紧致，可以从中选出有限覆盖，即存在有限的元素组 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，使得 $Ua_i^{-1}(i=1,2,\cdots,m)$ 覆盖 G. 对于每一 $x\in G$ 有 $f(x)\geqslant 0$；而对任何 $x\in G$，存在 k 使得 $x\in Ua_k^{-1}$，即 $xa_k\in U$，因此 $f(xa_k)>h$. 从而 $M(A,f;x)\geqslant h/m$，即 $M(f)=M(M(A,f))\geqslant h/m$，这里利用了(23)式和(1)式. ▌

定理 6.3.1 的证明 对于每一定义在紧致群 G 上的连续实值函数 f，我们令

$$\int_G f(x)\mathrm{d}x \ :=M(f) \tag{26}$$

作为积分 $\int_G f(x)\mathrm{d}x$ 的定义.

设 $k\in\mathbf{R}$，则

$$M(A,kf;x)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}kf(xa_i)=kM(A,f;x).$$

设 $M(f)=p$，则对于每个正数 ε，存在 G 中有限元素组 A，使得 $|M(A,f;x)-p|<\varepsilon$ 对一切 $x\in G$ 成立. 从而有

$$|M(A,kf;x)-kp|=|k|\,|M(A,f;x)-p|<|k|\varepsilon.$$

因此 kp 是函数 kf 的右平均数，即 $M(kp)=kM(f)$. 再由引理 6.3.4，即得积分定义 1 中的条件 1)成立.

由引理 6.3.6 得到正定性. 由引理 6.3.5 得到不变性. 显然 $M(1)=1$，即条件 4)成立.

假如用某一方法定义了积分 $\int_G^* f(x)\mathrm{d}x$，它满足定义 1 中的条件 1)—4). 我们来证 $\int_G^* f(x)\mathrm{d}x=M(f)$.

设 p 为函数 f 的右平均数，于是对每一正数 ε，存在 G 中有限元素组 A，使得 $|M(A,f;x)-p|<\varepsilon$ 对一切 $x\in G$ 成立. 即

$$-\varepsilon<M(A,f;x)-p<\varepsilon.$$

利用不变积分 $\int_G^* f(x)\mathrm{d}x$ 的线性和正定性以及规范性，得

$$-\varepsilon < \int_G^* M(A,f;x)\mathrm{d}x - p < \varepsilon,$$

即 $\left|\int_G^* M(A,f;x)\mathrm{d}x - p\right| < \varepsilon$. 利用右不变性和线性可得

$$\int_G^* M(A,f;x)\mathrm{d}x = \int_G^* \sum_{i=1}^m \frac{f(xa_i)}{m}\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{i=1}^m \frac{1}{m}\int_G^* f(xa_i)\mathrm{d}x = \int_G^* f(x)\mathrm{d}x.$$

于是有 $\left|\int_G^* f(x)\mathrm{d}x - p\right| < \varepsilon$，由于此不等式对任何正数 ε 都成立，所以 $\int_G^* f(x)\mathrm{d}x = p = M(f)$. 这就证明了 G 上不变积分的唯一性. ▌

推论6.3.1 紧致群 G 上的不变积分还满足

$$\int_G f(x^{-1})\mathrm{d}x = \int_G f(x)\mathrm{d}x. \tag{27}$$

证明 对于 G 上任一连续实值函数 f，令

$$\int_G^* f(x)\mathrm{d}x \coloneqq \int_G f(x^{-1})\mathrm{d}x.$$

我们来证 $\int_G^* f(x)\mathrm{d}x$ 满足线性、正定性、右不变性和规范性，从而由定理6.3.1的证明过程知道，必有 $\int_G^* f(x)\mathrm{d}x = \int_G f(x)\mathrm{d}x$，于是(27)式得证.

由于函数 $f(x^{-1})$ 是函数 $f(u)$ 与函数 $u=x^{-1}$ 的复合函数，并且当 x 跑遍 G 中元素时，x^{-1} 也跑遍 G 中元素，因此容易验证 $\int_G^* f(x)\mathrm{d}x$ 具有线性、正定性和规范性. 现在来验证它也具有右不变性. 对于 $a\in G$，设 $f'(x)=f(xa)$. 我们有

$$\int_G^* f(xa)\mathrm{d}x = \int_G^* f'(x)\mathrm{d}x = \int_G f'(x^{-1})\mathrm{d}x = \int_G f(x^{-1}a)\mathrm{d}x$$

$$= \int_G f((a^{-1}x)^{-1})\mathrm{d}x = \int_G f(x^{-1})\mathrm{d}x = \int_G^* f(x)\mathrm{d}x,$$

其中倒数第二个等号利用了积分 $\int_G f(x)\mathrm{d}x$ 的左不变性. 由定理 6.3.1中已证明的唯一性,即得 $\int_G f(x^{-1})\mathrm{d}x = \int_G f(x)\mathrm{d}x$. ∎

推论6.3.2 紧致群 G 上的不变积分还满足

$$\left|\int_G f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_G |f(x)|\mathrm{d}x. \tag{28}$$

证明 显然 $|f(x)|$ 也是 G 上的连续函数. 因为 $|f(x)| - f(x) \geqslant 0$, 所以 $\int_G (|f(x)| - f(x))\mathrm{d}x \geqslant 0$, 从而 $\int_G |f(x)|\mathrm{d}x \geqslant \int_G f(x)\mathrm{d}x$. 因为 $|f(x)| + f(x) \geqslant 0$, 所以 $\int_G (|f(x)| + f(x))\mathrm{d}x \geqslant 0$, 从而 $\int_G f(x)\mathrm{d}x \geqslant -\int_G |f(x)|\mathrm{d}x$. 因此(28)式成立. ∎

定义在 G 上的复值函数可以写成 $h=f+\mathrm{i}g$, 其中 f 与 g 都是定义在 G 上的实值函数. 如果 f 与 g 都连续, 则称 $h=f+\mathrm{i}g$ 为**连续复值函数**.

对于定义在紧致群 G 上的连续复值函数 $h=f+\mathrm{i}g$, 我们用等式

$$\int_G h(x)\mathrm{d}x \coloneqq \int_G f(x)\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_G g(x)\mathrm{d}x$$

作为 $h(x)$ 积分的定义. 容易验证, 连续复值函数的积分也满足线性、不变性、规范性以及下述关系式

$$\left|\int_G h(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_G |h(x)|\mathrm{d}x. \tag{29}$$

我们来证(29)式. 记 $\int_G f(x)\mathrm{d}x = a$, $\int_G g(x)\mathrm{d}x = b$. 我们有

$$\begin{aligned}\left|\int_G h(x)\mathrm{d}x\right|^2 &= a^2+b^2 = a\int_G f(x)\mathrm{d}x + b\int_G g(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_G [af(x)+bg(x)]\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_G \sqrt{a^2+b^2}\ \sqrt{f(x)^2+g(x)^2}\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\int_G |h(x)|\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

由此即得(29)式. ▍

连续复值函数的积分还满足

$$\int_G h(x^{-1})\mathrm{d}x = \int_G h(x)\mathrm{d}x, \tag{30}$$

$$\overline{\int_G h(x)\mathrm{d}x} = \int_G \overline{h(x)}\mathrm{d}x. \tag{31}$$

我们不仅对一个变量的函数用到积分，而且还对两个变量的函数用积分，这里必须证明，积分结果与积分次序无关.

引理6.3.7 设 G 与 H 是两个紧致群，f 为两个变量 $x\in G$ 与 $y\in H$ 的连续实值函数. 当 y 固定时，f 就是 x 的连续函数，于是有积分 $\int_G f(x,y)\mathrm{d}x = g(y)$. 则 g 是定义在 H 上的连续函数.

证明 记 $P=G\times H$，函数 f 可以看成一个变量 $z=(x,y)\in P$ 的连续函数. 因为群 P 是紧致的，所以 f 必为均匀连续函数，因此对于任给正数 ϵ 存在有 P 的单位元素的邻域 W，使得当 $z'z^{-1}\in W$ 时，有 $|f(z')-f(z)|<\varepsilon$. 邻域 W 是所有 (x,y) 这样的元素对所组成的，其中 $x\in U, y\in V$，而 U 与 V 各为群 G 与 H 的单位元素的邻域. 因此如果 $x'x^{-1}\in U, y'y^{-1}\in V$，那么 $|f(x',y')-f(x,y)|<\varepsilon$. 特别，当 $y'y^{-1}\in V$ 时有 $|f(x,y')-f(x,y)|<\varepsilon$. 由此得出

$$\begin{aligned}
|g(y')-g(y)| &= \left|\int_G (f(x,y')-f(x,y))\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \int_G |f(x,y')-f(x,y)|\mathrm{d}x \\
&< \int_G \varepsilon \mathrm{d}x = \varepsilon.
\end{aligned}$$

因此，$g(y)$ 是均匀连续的函数. ▍

定理6.3.2 设 G 与 H 为两个紧致群，P 为它们的直积，f 为两个变量 $x\in G$ 与 $y\in H$ 的连续实值函数. $f(x,y)=f(z)$，$z=(x,y)\in P$. 则我们有

$$\int_H\left(\int_G f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_G\left(\int_H f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_P f(z)\mathrm{d}z,$$

把上述积分记作 $\iint\limits_{G\times H} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

证明 我们来证 $\int_H\left(\int_G f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_P f(z)\mathrm{d}z$. 为此令

$$\int_P^* f(z)\mathrm{d}z \coloneqq \int_H\left(\int_G f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

易验证积分 $\int_P^* f(z)\mathrm{d}z$ 具有线性，正定性，规范性. 下面验证它具有右不变性：设 $c\in P$, $c=(a,b)$, $a\in G$, $b\in H$；于是

$$\int_P^* f(zc)\mathrm{d}z = \int_H\left(\int_G f(xa,yb)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_H\left(\int_G f(x,yb)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$
$$= \int_H\left(\int_G f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_P^* f(z)\mathrm{d}z.$$

由于不变积分的唯一性，便得到

$$\int_H\left(\int_G f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_P f(z)\mathrm{d}z.$$

同理可证 $\int_G\left(\int_H f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_P f(z)\mathrm{d}z$. ▮

如果群 G 与群 H 一致，那么函数 $f(x,y)$ 是定义在 G 上的两个变量的连续函数. 这个情形是最重要的.

习 题 6.3

1. 设 G 与 H 为两个紧致群，P 为它们的直积，f 为两个变量 $x\in G$ 与 $y\in H$ 的连续复值函数. $f(x,y)=f(z)$, $z=(x,y)\in P$. 设 $f(x,y)=f_1(x,y)+\mathrm{i}f_2(x,y)$，其中 $f_1(x,y)$ 与 $f_2(x,y)$ 是两个变量的连续实值函数. 当 y 固定时，可以有积分 $\int_G f(x,y)\mathrm{d}x = g(y)$. 证明：

(i) $g(y)$ 是 H 上的连续复值函数；

(ii) $\int_H\left(\int_G f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_G\left(\int_H f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$
$= \int_P f(z)\mathrm{d}z$,

把这个积分记作 $\iint\limits_{G\times H} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

§4 紧致群的表示的完全可约性

在这一节我们要证明紧致群上每一个有限维的复(或实)线性表示都是完全可约的.从而为了描绘一个给定的紧致群 G 在复数域(或实数域)上的所有有限维线性表示,就只要去研究 G 的所有不可约表示.

回忆完全可约表示的定义:群 G 在域 K 上的线性表示 (φ,V) 称为是完全可约的,如果对于 V 的每一个 G 不变子空间 U,都存在 V 的 G 不变子空间 W 使得 $V=U\oplus W$.虽然对于 V 的每一个子空间都存在补空间,但是 G 不变子空间 U 的补空间不一定是 G 不变的.如果 V 是一个欧氏空间,即 V 中给定了一个内积,那么 V 的任一子空间与它的正交补的直和恰好是 V.对于 V 的 G 不变子空间 U,我们希望它的正交补 $U^\perp$ 也是 G 不变的,即任意 $\alpha\in U^\perp$,希望对一切 $g\in G$ 有 $\varphi(g)\alpha\in U^\perp$,这也就是要求对一切 $\beta\in U$ 有 $(\varphi(g)\alpha,\beta)=0$. 因为 U 是 G 不变的,所以 $\varphi(g^{-1})\beta\in U$. 记 $\beta'=\varphi(g^{-1})\beta$,则 $\varphi(g)\beta'=\beta$. 从而 $(\varphi(g)\alpha,\beta)=(\varphi(g)\alpha,\varphi(g)\beta')$. 由于 $(\alpha,\beta')=0$,如果能有 $(\varphi(g)\alpha,\varphi(g)\beta')=(\alpha,\beta')$,那么 $\varphi(g)\alpha\in U^\perp$. 这表明:如果 V 中存在这样一个内积,能够使 $(\varphi(g)x,\varphi(g)y)=(x,y)$ 对一切 $g\in G$,一切 $x,y\in V$ 都成立,那么从 U 是 G 不变的可以得出 $U^\perp$ 一定是 G 不变的.从而 (φ,V) 便是完全可约的.上述性质意味着对于 V 的这个内积,对一切 $g\in G$,$\varphi(g)$ 都是正交变换.称具有这样性质的内积为 G 不变内积,这样的表示 (φ,V) 称为 G 的正交表示(参见第一章§4的定义1).综上所述,要说明紧致群 G 的有限维实线性表示 (φ,V) 是完全可约的,关键是:在 V 中找到一个 G 不变内积,使得 (φ,V) 是正交表示.

定理6.4.1 紧致群的每一个有限维实线性表示是正交表示.

证明 设(φ,V)是紧致群G的一个有限维实线性表示. 设f是V的任意一个内积. 给定$\alpha,\beta\in V$,我们来说明$f(\varphi(g)\alpha,\varphi(g)\beta)$是变量$g\in G$的连续函数. 为此在$V$中取一个标准正交基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$,设$\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)X$,$\beta=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)Y$. 设$\varphi$在这个基下提供的矩阵表示是$\Phi$,则

$$\varphi(g)\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\Phi(g)X,$$
$$\varphi(g)\beta=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\Phi(g)Y.$$

于是

$$f(\varphi(g)\alpha,\varphi(g)\beta)=(\Phi(g)X)'(\Phi(g)Y)=X'\Phi(g)'\Phi(g)Y.$$

由于φ是紧致群G的线性表示,所以φ的矩阵元素是G上的连续函数. 从而$f(\varphi(g)\alpha,\varphi(g)\beta)$是定义在$G$上的连续函数,因此它在$G$上可以积分. 令

$$\tilde{f}(\alpha,\beta)\coloneqq\int_G f(\varphi(g)\alpha,\varphi(g)\beta)\mathrm{d}g,$$

这给出了V上的一个新的二元函数. 容易验证它具有双线性、对称性. 现在来验证它具有正定性: 因为f是V上的内积,所以$f(\varphi(g)\alpha,\varphi(g)\alpha)\geqslant 0$,并且等号成立当且仅当$\varphi(g)\alpha=0$,即$\alpha=0$,因此$\tilde{f}(\alpha,\alpha)=\int_G f(\varphi(g)\alpha,\varphi(g)\alpha)\mathrm{d}g\geqslant 0$,并且等号成立当且仅当$f(\varphi(g)\alpha,\varphi(g)\alpha)$恒等于零($\forall\ g\in G$),即,$\alpha=0$. 所以$\tilde{f}$是$V$上的又一个内积. 我们来证明它是$G$不变的: 对任意$h\in G$,我们有(利用积分的右不变性):

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\varphi(h)\alpha,\varphi(h)\beta)&=\int_G f(\varphi(g)\varphi(h)\alpha,\varphi(g)\varphi(h)\beta)\mathrm{d}g\\&=\int_G f(\varphi(gh)\alpha,\varphi(gh)\beta)\mathrm{d}g\\&=\int_G f(\varphi(g)\alpha,\varphi(g)\beta)\mathrm{d}g=\tilde{f}(\alpha,\beta),\end{aligned}$$

这表明$\tilde{f}$是G不变内积,即,对于V的内积$\tilde{f}$,对一切$h\in G$,$\varphi(h)$是正交变换,从而φ是正交表示. ▍

类似地，可以证明紧致群的每一个有限维复线性表示是酉表示.

定理6.4.2 紧致群的每一个有限维实(复)线性表示是完全可约的.

证明 设(φ,V)是紧致群G的一个有限维实(复)线性表示. 在V中取一个G不变内积，V成为欧几里得空间(酉空间). 设U是V的任意一个G不变子空间，则$V=U\oplus U^{\perp}$. 我们在本节第二段已经证明$U^{\perp}$是G不变子空间. 因此(φ,V)是完全可约的. ▎

习 题 6.4

1. 对于拓扑群$(\boldsymbol{R},+)$，任意给定一个复数a，令

$$\varphi_a(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}at},\quad t\in\boldsymbol{R}.$$

(1) 说明拓扑群$(\boldsymbol{R},+)$的每个1次复表示具有上述形式.

(2) 证明：φ_a是酉表示当且仅当$a\in\boldsymbol{R}$.

2. 给了拓扑群$(\boldsymbol{R},+)$到拓扑群$\mathrm{SO}(2)$的一个映射

$$f:t\mapsto\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}.$$

(1) 证明：f是拓扑群$(\boldsymbol{R},+)$到拓扑群$\mathrm{SO}(2)$上的同态，并且$\mathrm{Ker}f=\{2\pi m\mid m\in\boldsymbol{Z}\}$，$\mathrm{SO}(2)\cong\boldsymbol{R}/2\pi\boldsymbol{Z}$.

(2) 证明：紧致群$\mathrm{SO}(2)$的每一个不可约酉表示是1次的.

(3) 设Φ是紧致群$\mathrm{SO}(2)$的一个不可约酉表示，令

$$\tilde{\Phi}(t+2\pi m)=\Phi\left(\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}\right),\text{ 其中 }0\leqslant t<2\pi,m\in\boldsymbol{Z}.$$

证明：$\tilde{\Phi}$是拓扑群$(\boldsymbol{R},+)$的一个不可约酉表示，并且$\tilde{\Phi}(2\pi)=\tilde{\Phi}(0)=1$.

反之，设$\tilde{\Phi}$是拓扑群$(\boldsymbol{R},+)$的不可约酉表示并且满足$\tilde{\Phi}(2\pi m)=1$，$\forall\, m\in\boldsymbol{Z}$. 令

$$\Phi\left(\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}\right)=\tilde{\Phi}(t),\quad 0\leqslant t<2\pi.$$

证明：Φ 是紧致群 SO(2)的一个不可约酉表示.

说明紧致群 SO(2)的不可约酉表示组成的集合与拓扑群($\boldsymbol{R}$, t)的满足"$\tilde{\Phi}(2\pi m)=1$对一切 $m\in \boldsymbol{Z}$"的不可约酉表示 $\tilde{\Phi}$ 组成的集合之间有一一对应.

(4) 证明：SO(2)的每一个不可约复表示具有形式

$$\Phi_n\left(\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}\right)=e^{int},\ 0\leqslant t<2\pi, n\in \boldsymbol{Z}.$$

(5) 证明：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ikt}\cdot\overline{e^{ilt}}dt=\delta_{kl}.$$

3. 如果 Φ 是群 G 的酉表示，它提供的特征标记作 χ. 则对于任意 $g\in G$ 有 $\Phi(g^{-1})=\overline{\Phi(g)}'$，并且 $\chi(g^{-1})=\overline{\chi(g)}$.

4. 设(φ,V)是3阶循环群 $G=\langle a\rangle$的2次实线性表示，在 V 的一个基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$下，$\varphi$ 提供的矩阵表示 Φ 使得

$$\Phi(a)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

求 V 的一个 G 不变内积.

5. 设 f 和 f_0是有限维复向量空间 V 的两个内积. 则存在 V 的一个线性变换 σ 使得

$$f(\alpha,\beta)=f_0(\sigma\alpha,\beta) \tag{1}$$

对一切 $\alpha,\beta\in V$ 成立.

(**提示**：易看出，只要证(1)式对于 V 的一个基成立. 为此设$(e_1,e_2,\cdots,e_n)$是 V 中关于内积 f_0的一个标准正交基. 设 σ 是在这个基下矩阵为$(f(e_j,e_i))$的线性变换，则

$$\begin{aligned}f_0(\sigma e_i,e_j)&=f_0\Big(\sum_{k=1}^n f(e_i,e_k)e_k,e_j\Big)\\&=\sum_{k=1}^n f(e_i,e_k)f_0(e_k,e_j)=f(e_i,e_j).)\end{aligned}$$

6. 设(φ,V)是群 G 的不可约酉表示，则 V 的 G 不变内积在相

差一个常数因子的意义上是唯一的.

(**提示**：设 f_0 和 f 是 V 的两个 G 不变内积. 据第5题，存在 V 的一个线性变换 σ 使得(1)式成立. 去证 σ 与一切 $\varphi(g)$ 可交换，为此考虑对于任意 $g\in G$，任意 $x,y\in V$，有

$$\begin{aligned} f_0(\varphi(g)^{-1}\sigma\varphi(g)x,y) &= f_0(\sigma\varphi(g)x,\varphi(g)y) \\ &= f(\varphi(g)x,\varphi(g)y) \\ &= f(x,y) = f_0(\sigma x,y); \end{aligned}$$

由此得出 $\varphi(g)^{-1}\sigma\varphi(g)=\sigma$. 利用 Schur 引理得，$\sigma=c1_V$ 对于某个 $c\in\mathbf{C}$. 因此 $f=cf_0$.)

7. 设 (φ,V) 是群 G 的酉表示. 设 U,W 是 V 的最小不变子空间使得 φ_U 与 φ_W 不等价. 则 U 和 W 对于 V 的任意一个 G 不变内积是正交的.

(**提示**：固定一个 V 的 G 不变内积，V 成为酉空间. 设 σ 是 V 在 U 上的正交投影，则 $\operatorname{Ker}\sigma=U^{\perp}$. 把 σ 在 W 上的限制记作 σ_1，它是 W 到 U 的一个线性映射. 去证 σ_1 满足 $\varphi_U(g)\sigma_1=\sigma_1\varphi_W(g)$ 对一切 $g\in G$. 为此在 V 中取一个标准正交基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$，其中 $\alpha_i\in U$，$\beta_j\in U^{\perp}$. 注意 $U^{\perp}$ 也是 G 不变子空间，从 σ 和 $\varphi(g)$ 在此基下的矩阵可看出 $\sigma\varphi(g)=\varphi(g)\sigma$. 再利用 Schur 引理.)

§5 正交关系

这一节我们来讨论紧致群的不可约复表示的矩阵元素之间的正交关系，特别地还将得到特征标的正交关系. 在本章§2我们已指出：研究紧致群的不可约复表示的有力工具是 Schur 引理. 现在我们用矩阵的语言把 Schur 引理叙述一遍.

Schur 引理 设 Φ 和 Ψ 分别是群 G 的 n 次和 m 次不可约复矩阵表示. 设 $C=(c_{ij})$ 是复数域上 $m\times n$ 矩阵，使得

$$\Psi(g)C = C\Phi(g),\quad \forall g\in G. \tag{1}$$

(i) 如果 Φ 与 Ψ 不等价，则 $C=0$；

(ii) 如果 $\Phi=\Psi$，则 $C=\lambda I$，其中 λ 是某个复数.

注 Schur 引理中的(i)对于实数域的情形也成立.

设 n 级复(实)矩阵 $A(g)=(a_{ij}(g))$ 的每个元素 $a_{ij}(g)$ 是紧致群 G 上的连续函数，我们用记号 $\int_G A(g)\mathrm{d}g$ 表示这样一个矩阵，它的 (i,j) 元为 $\int_G a_{ij}(g)\mathrm{d}g$. 容易看出，若 $C=(c_{ij})$ 是 n 级复(实)矩阵，则有

$$\int_G C\cdot A(g)\mathrm{d}g = C\int_G A(g)\mathrm{d}g,$$

$$\int_G A(g)C\mathrm{d}g = \left(\int_G A(g)\mathrm{d}g\right)C.$$

定理6.5.1 设 Φ 和 Ψ 是紧致群 G 的 n 次和 m 次不可约复矩阵表示，设 $\Phi(g)=(a_{ij}(g))$，$\Psi(g)=(b_{ij}(g))$，$\forall\ g\in G$.

(i) 若 Φ 与 Ψ 不等价，则

$$\int_G b_{ij}(g)a_{lk}(g^{-1})\mathrm{d}g = 0,\quad 1\leqslant i,j\leqslant m,\ 1\leqslant k,l\leqslant n. \tag{2}$$

(ii) 若 $\Phi=\Psi$，则

$$\int_G a_{ij}(g)a_{ji}(g^{-1})\mathrm{d}g = \frac{1}{n},\quad 1\leqslant i,j\leqslant n; \tag{3}$$

$$\int_G a_{ij}(g)a_{lk}(g^{-1})\mathrm{d}g = 0,\quad i\neq k \text{ 或者 } j\neq l. \tag{4}$$

证明 任取一个 $m\times n$ 复矩阵 $C=(c_{ij})$，令

$$\widetilde{C} \coloneqq \int_G \Psi(g)C\Phi(g)^{-1}\mathrm{d}g. \tag{5}$$

则对于任意 $x\in G$，我们有

$$\begin{aligned}\Psi(x)\widetilde{C}\Phi(x)^{-1} &= \int_G \Psi(xg)C\Phi(xg)^{-1}\mathrm{d}g \\ &= \int_G \Psi(g)C\Phi(g)^{-1}\mathrm{d}g = \widetilde{C}.\end{aligned}$$

(i) 若 Φ 与 Ψ 不等价，由 Schur 引理(i)得，$\widetilde{C}=0$. 特别地，取 $C=E_{jl}$，并且注意到 $\Phi(g)^{-1}=\Phi(g^{-1})$，我们得到

$$\int_G b_{ij}(g)a_{lk}(g^{-1})\mathrm{d}g = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant k \leqslant n.$$

由于 j 可取1,2,…,m,l 可取1,2,…,n,因此(2)式成立.

(ii) 若 $\Phi=\Psi$,由 Schur 引理的(ii)得,$\widetilde{C}=\lambda I$,其中 λ 是某个复数. 为了决定 λ,在 $\widetilde{C}=\lambda I$ 两边取迹得

$$\begin{aligned}\lambda n = \mathrm{tr}(\widetilde{C}) &= \sum_{i=1}^{n}\int_G (\Psi(g)C\Phi(g)^{-1})_{ii}\mathrm{d}g \\ &= \int_G \Big[\sum_{i=1}^{n}(\Psi(g)C\Phi(g)^{-1})_{ii}\Big]\mathrm{d}g \\ &= \int_G \mathrm{tr}(\Psi(g)C\Phi(g)^{-1})\mathrm{d}g \\ &= \int_G \mathrm{tr}(C)\mathrm{d}g = \mathrm{tr}(C),\end{aligned}$$

由此即得 $\lambda=\frac{1}{n}\mathrm{tr}(C)$. 取 $C=E_{jl}(1\leqslant j,l\leqslant n)$,类似于(i)中的计算并且注意 $\mathrm{tr}(E_{jl})=\delta_{jl}$,我们得到

$$\int_G a_{ij}(g)a_{lk}(g^{-1})\mathrm{d}g = \frac{1}{n}\delta_{jl}\delta_{ik}. \tag{6}$$

由此即得(3)和(4)式. ▌

注 定理6.5.1的(i)对于实数域的情形也成立.

推论6.5.1 设 Φ 与 Ψ 分别是紧致群 G 的 n 次和 m 次不可约酉表示,设 $\Phi(g)=(a_{ij}(g))$,$\Psi(g)=(b_{ij}(g))$,$\forall\ g\in G$.

(i) 若 Φ 与 Ψ 不等价,则

$$\int_G b_{ij}(g)\,\overline{a_{kl}(g)}\mathrm{d}g = 0, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant m,\ 1 \leqslant k,l \leqslant n. \tag{7}$$

(ii) 若 $\Phi=\Psi$,则

$$\int_G a_{ij}(g)\,\overline{a_{kl}(g)}\mathrm{d}g = \frac{1}{n}\delta_{jl}\delta_{ik}, \quad 1 \leqslant i,j,k,l \leqslant n. \tag{8}$$

证明 因为 $\Phi(g)$ 是酉矩阵,所以 $\Phi(g)^{-1}=\overline{\Phi(g)}'$. 从而 $a_{ij}(g^{-1})=\overline{a_{ji}(g)}$,$1\leqslant i,j\leqslant m$. 由定理6.5.1即得结论. ▌

定理6.5.2 设 φ 与 ψ 是紧致群 G 的两个有限维不可约复表示,χ_φ,χ_ψ 分别是它们提供的特征标.

(i) 若 φ 与 ψ 不等价，则

$$\int_G \chi_\psi(g)\,\overline{\chi_\varphi(g)}\mathrm{d}g = 0; \tag{9}$$

(ii) 若 $\varphi=\psi$，则

$$\int_G \chi_\varphi(g)\,\overline{\chi_\varphi(g)}\mathrm{d}g = 1. \tag{10}$$

证明 设 φ,ψ 提供的酉矩阵表示分别为 $\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Psi}$.

(i) 若 φ 与 ψ 不等价，则由定理6.5.1得

$$\begin{aligned}\int_G \chi_\psi(g)\,\overline{\chi_\varphi(g)}\mathrm{d}g &= \int_G \chi_\psi(g)\chi_\varphi(g^{-1})\mathrm{d}g \\ &= \int_G \sum_{i=1}^m b_{ii}(g)\cdot\sum_{j=1}^n a_{jj}(g^{-1})\mathrm{d}g \\ &= \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n \int_G b_{ii}(g)a_{jj}(g^{-1})\mathrm{d}g = 0.\end{aligned}$$

(ii) 若 $\varphi=\psi$，则我们有

$$\begin{aligned}\int_G \chi_\varphi(g)\,\overline{\chi_\varphi(g)}\mathrm{d}g &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \int_G a_{ii}(g)a_{jj}(g^{-1})\mathrm{d}g \\ &= \sum_{i=1}^n \int_G a_{ii}(g)a_{ii}(g^{-1})\mathrm{d}g = 1.\end{aligned}$$ ▎

推论6.5.2 设 φ 与 ψ 是紧致群 G 的不等价的有限维不可约实表示，则 $\int_G \chi_\psi(g)\chi_\varphi(g)\mathrm{d}g = 0$.

证明 与定理6.5.2的(i)的证法一样. ▎

我们用 $C(G,\boldsymbol{C})$ 表示紧致群 G 上的所有连续复值函数组成的集合，显然它是复线性空间. 对于 $f_1,f_2\in C(G,\boldsymbol{C})$，我们定义

$$(f_1,f_2) \coloneqq \int_G f_1(x)\,\overline{f_2(x)}\mathrm{d}x, \tag{11}$$

易验证这是复线性空间 $C(G,\boldsymbol{C})$ 的一个内积. 由于紧致群 G 上的复表示的矩阵元素是连续函数，因此利用(11)式定义的内积的记号可以把定理6.5.1和定理6.5.2叙述如下：

定理6.5.1′ 设 φ 与 ψ 分别是紧致群 G 的 n 次和 m 次不可约

复表示，它们提供的酉矩阵表示分别记作 Φ 与 Ψ. 设 $\Phi(g)=(a_{ij}(g))$, $\Psi(g)=(b_{ij}(g))$.

(i) 若 φ 与 ψ 不等价，则

$$(b_{ij},a_{kl})=0,\quad 1\leqslant i,j\leqslant m,\ 1\leqslant k,l\leqslant n;$$

$$(\chi_{\psi},\chi_{\varphi})=0.$$

(ii) 若 $\varphi=\psi$，则

$$(a_{ij},a_{kl})=\frac{1}{n}\delta_{jl}\delta_{ik},\quad 1\leqslant i,j,k,l\leqslant n;$$

$$(\chi_{\varphi},\chi_{\varphi})=1.\quad \blacksquare$$

由定理6.5.1′看出，紧致群 G 的所有互不等价的有限维不可约复表示提供的特征标组成的集合 $\mathrm{Irr}(G,\boldsymbol{C})$ 是复内积空间 $C(G,\boldsymbol{C})$ 的正交规范集. 紧致群 G 的所有互不等价的有限维不可约复表示的酉矩阵元素组成的集合 Δ 是 $C(G,\boldsymbol{C})$ 的正交集，从而它们是线性无关的，并且 G 的不可约复表示 φ 的酉矩阵元素 $a_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant n)$ 满足

$$(a_{ij},a_{ij})=\frac{1}{n},$$

其中 n 是 φ 的次数.

类似地，紧致群 G 上所有连续实值函数组成的集合，记作 $C(G,\boldsymbol{R})$，是实线性空间. 定义

$$(f_1,f_2)\coloneqq\int_G f_1(x)f_2(x)\mathrm{d}x,\quad \forall\ f_1,f_2\in C(G,\boldsymbol{R}),$$

易验证这是 $C(G,\boldsymbol{R})$ 的一个内积. 于是推论6.5.2可以叙述成：设 φ 与 ψ 是紧致群 G 的不等价的有限维不可约实表示，则 $(\chi_{\psi},\chi_{\varphi})=0$，于是 $\mathrm{Irr}(G,\boldsymbol{R})$ 是实内积空间 $C(G,\boldsymbol{R})$ 的正交集.

利用特征标的正交关系，我们可以得到一些重要结果.

命题6.5.1 设 G 是紧致群，φ 是 G 的任一有限维复表示，φ_i 是 G 的任一有限维不可约复表示. 则 φ_i 在 φ 中的重数等于 (χ_{φ},χ_i)，其中 χ_i 是 φ_i 提供的特征标.

证明 设 $\varphi \approx m_1\varphi_1 \oplus m_2\varphi_2 \oplus \cdots \oplus m_s\varphi_s$，其中 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_s$ 是 G 的一些彼此不等价的不可约复表示. 由此得到

$$\chi_\varphi = m_1\chi_1 + m_2\chi_2 + \cdots + m_s\chi_s,$$

在此式两边用 χ_i 作内积得

$$(\chi_\varphi,\chi_i) = m_i. \quad ▌$$

定理6.5.3 紧致群 G 的两个有限维复表示等价的充分必要条件是它们提供的特征标相同.

证明 必要性是显然的.

充分性 设 φ 和 ψ 是 G 的两个有限维复表示. 如果 $\chi_\varphi=\chi_\psi$，则对于 G 的每一个有限维不可约复表示 φ_i 有 $(\chi_\varphi,\chi_i)=(\chi_\psi,\chi_i)$. 从而 $\varphi \approx \psi$. ▌

定理6.5.4 紧致群 G 的有限维复表示 φ 不可约的充分必要条件是 $(\chi_\varphi,\chi_\varphi)=1$.

证明 *必要性* 由定理6.5.2得到.

充分性 设 $\chi_\varphi=m_1\chi_1+\cdots+m_s\chi_s$，$\{\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_s\}\subseteq \mathrm{Irr}(G,\boldsymbol{C})$. 由题设并且利用命题6.5.1得，$1=(\chi_\varphi,\chi_\varphi)=\sum\limits_{i=1}^{s} m_i^2$. 于是存在唯一的 l 使得 $m_l=1$，而其余的 $m_i=0$. 因此 $\varphi \approx \varphi_l$. ▌

定理6.5.5 紧致群 G 的两个有限维实表示等价的充分必要条件是它们提供的特征标相同.

证明 只需证充分性 设 φ,ψ 是 G 的有限维实表示，并且满足 $\chi_\varphi=\chi_\psi$. 设 $\chi_\varphi=\sum\limits_{i=1}^{s} m_i\chi_i$，$\chi_\psi=\sum\limits_{i=1}^{s} m_i'\chi_i$，其中 $\{\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_s\}\subseteq \mathrm{Irr}(G,\boldsymbol{R})$. 于是有 $(\chi_\varphi,\chi_j)=m_j(\chi_j,\chi_j)$，$(\chi_\psi,\chi_j)=m_j'(\chi_j,\chi_j)$. 从而得 $m_j=m_j'$. 所以 $\varphi \approx \psi$. ▌

在第四章 § 2我们已指出群 G 的两个特征标的乘积仍是特征标. 有限群 G 的所有有限维不可约复(实)特征标的整系数线性组合形成的集合，记作 $\mathrm{char}(G,\boldsymbol{C})$ ($\mathrm{char}(G,\boldsymbol{R})$)，是环 $C(G,\boldsymbol{C})$ ($C(G,\boldsymbol{R})$) 的子环，它的单位元是 G 的主特征标，称这个子环是 G 的广义

特征标环. char$(G,\boldsymbol{C})$(char$(G,\boldsymbol{R})$)的元素 μ 是 G 的特征标当且仅当 μ 是 Irr$(G,\boldsymbol{C})$(Irr$(G,\boldsymbol{R})$)中元素的非负整系数线性组合. 这些结论对于紧致群也成立,其中线性组合均理解成有限多个不可约特征标的线性组合.

习　题　6.5

1. 设 $G^*=(\boldsymbol{R},+)$, N 为所有整数组成的子群, 令 $G=G^*/N$, $\varphi_n(x)=e^{2\pi inx}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. φ_n 可以作为定义在 G 上的函数. 证明: $\{\varphi_n|n\in\boldsymbol{Z}\}$ 是 G 的全部不可约复表示.

§6　完备性 · Peter-Weyl 定理

在上一节我们曾指出,紧致群 G 的所有彼此不等价的有限维不可约复表示的酉矩阵元素组成的集合 Δ 是 G 上所有连续复值函数组成的复内积空间 $C(G,\boldsymbol{C})$(其内积由上一节的(11)式定义)的正交集,并且任意一个这样的矩阵元素跟自己的内积等于 $\frac{1}{n}$,其中 n 是对应的不可约表示的次数.

这一节我们要进一步指出,Δ 是 $C(G,\boldsymbol{C})$的完备正交集. 下面先给出"完备性"的定义.

定义1　设 G 是紧致群,复内积空间 $C(G,\boldsymbol{C})$的一个可数或有限的正交集 $f_1,f_2,\cdots$称为是**完备**的,如果它们生成的线性子空间依照由内积所定义的拓扑(因为有了内积,就可定义距离,从而 $C(G,\boldsymbol{C})$成为度量空间.)是在 $C(G,\boldsymbol{C})$中稠密,即 $C(G,\boldsymbol{C})$中的每个元素 f 可以表示成 Fourier 级数:

$$f=\sum_k a_kf_k,\quad 其中\ a_k=\frac{(f,f_k)}{(f_k,f_k)},\tag{1}$$

此时称 $f_1,f_2,\cdots$是 $C(G,\boldsymbol{C})$的一个**正交基**.

例6.6.1　最简单的无限紧致群的例子是单位圆周 $S^1=\{z\in\boldsymbol{C}\mid |z|=1\}$. 因为它是 abel 群,所以它的不可约复表示都是1次的.

显然，φ_n：$z\mapsto z^n$ 是 S^1的1次复表示，其中 $n\in\mathbf{Z}$. 因此 S^1有无限多个不可约复表示. 函数 $z^n(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$生成的线性子空间与由所有可以表示成 z 和 $\bar{z}$ 的多项式的函数组成的集合 W 一致(注意利用 $z\bar{z}=|z|^2=1$). 据 Weierstrass 定理，S^1上任一连续函数可以由 W 的元素一致逼近. 因此 W 在复内积空间 $C(S^1,\mathbf{C})$中稠密. 这证明了 $\varphi_n(n=0;\pm1,\pm2,\cdots)$是 $C(S^1,\mathbf{C})$的完备集. 又据 § 5知，它们是正交集. 于是利用(1)式可知，$\varphi_n(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$是 S^1的全部不可约复表示.

一般地，我们有下面的结果：

定理6.6.1 设 G 是紧致群，则 G 的所有彼此不等价的有限维不可约复表示的酉矩阵元素组成的集合 Δ 是复内积空间 $C(G,\mathbf{C})$的完备正交集. 而且任意一个这样的矩阵元素跟自己的内积等于$\frac{1}{n}$，其中 n 是对应的不可约表示的次数.

正交性已经在 § 5证明，剩下要证的是完备性. 定理6.6.1的完备性部分称为 **Peter-Weyl 定理**，其证明可参看邦德列雅金(L. S. Pontryagin)著的《连续群(上册)》p. 246—250. 另外，E. B. Vinberg 著的《Linear Representations of Groups》p. 82—83，对于紧致线性群证明了定理6.6.1的完备性部分.

类似地，我们有

定理6.6.2 设 G 是紧致群，则 G 的所有彼此不等价的有限维不可约复表示特征标组成的集合 $\mathrm{Irr}(G,\mathbf{C})$是 G 的连续类函数空间(作为复内积空间 $C(G,\mathbf{C})$的子空间)的完备正交规范集.

定理6.6.2的正交规范性部分已在 § 5证明，完备性部分的证明可参看邦德列雅金著《连续群(上册)》p. 251—253.

作为 Peter-Weyl 定理的推论，有下面的重要结果：

推论6.6.1 对于紧致群 G 的每一个非单位元 a，存在 G 的一个有限维不可约复矩阵表示 Φ，使得 $\Phi(a)$不是单位矩阵.

证明 用反证法. 假如这个推论不成立，则存在 G 的一个非

单位元 a，使得对于 G 的每一个有限维不可约复矩阵表示 Φ 都有 $\Phi(a)$ 等于单位矩阵，于是 $\Phi(a)=\Phi(e)$，其中 e 是 G 的单位元. 因此对于 Δ 中的所有函数 Φ_{ij} 都有 $\Phi_{ij}(a)=\Phi_{ij}(e)$. 因为 $a\neq e$，据乌里松引理(参看邦德列雅金著《连续群(上册)》p. 73, p. 81)，存在 G 上的连续函数 f，使得 $f(a)\neq f(e)$. 但是据 Peter-Weyl 定理，Δ 在 $C(G,C)$ 中是完备的，从而得出，$f(a)=f(e)$，矛盾. ▌

从定理6.6.1还可以得到下面的重要结果：

定理6.6.3 设 G 为无限的紧致群，则 G 的所有彼此不等价的有限维不可约复表示组成的集合的基数等于拓扑空间 G 的权.

证明 据邦德列雅金著《连续群(上册)》p. 232的例53，紧致群 G 上的正交函数集的基数不超过拓扑空间 G 的权. 仍据该书的 p. 253的例57，紧致豪斯道夫(Hausdorff)空间 R 上的完备函数集的基数不小于该空间 R 的权. 据定理6.6.1，紧致群 G 的所有彼此不等价的有限维不可约复表示的酉矩阵元素组成的集合 Δ 是复内积空间 $C(G,C)$ 的完备正交集，因此，Δ 的基数等于拓扑空间 G 的权. 从例57的证明过程中知道，由于 G 是无限的，因此集合 Δ 也是无限的. 从而 G 的所有彼此不等价的有限维不可约复表示组成的集合也是无限的(否则，Δ 将是有限集)，于是该集合的基数等于集合 Δ 的基数，也就是等于拓扑空间 G 的权. ▌

§7 SU(2)和SO(3)的不可约复表示

这一节我们来构造 SU(2)和 SO(3)的一系列不可约复表示.

设 V_n 是两个不定元 x 和 y 的 n 次齐次多项式组成的空间. 考虑拓扑群 $SL(2,C)$ 到拓扑群 $GL(V_n)$ 的一个映射 Φ_n：

$$\Phi_n:\ SL(2,C)\to GL(V_n),$$
$$A\mapsto \Phi_n(A),$$

其中

$$(\Phi_n(A)f)(x,y)=f((x,y)A)$$

$$= f(a_{11}x + a_{21}y, a_{12}x + a_{22}y), \tag{1}$$

这里 $f \in V_n$, $A = (a_{ij})$. 容易验证 $\Phi_n(A)$ 是 V_n 的线性变换并且是可逆的(因为 $\Phi_n(A)\Phi_n(A^{-1}) = \Phi_n(A^{-1})\Phi_n(A) = 1_{V_n}$),所以 Φ_n 是 $\mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$ 到 $\mathrm{GL}(V_n)$ 的一个映射. 易证 $\Phi_n(AB) = \Phi_n(A)\Phi_n(B)$,所以 Φ_n 是 $\mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$ 到 $\mathrm{GL}(V_n)$ 的群同态. 为了证明 Φ_n 是拓扑群 $\mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$ 到拓扑群 $\mathrm{GL}(V_n)$ 的同态,剩下还要证明 Φ_n 是连续映射. 为此我们先看 V_n 的维数和一个基:因为 V_n 中任一元素 f 可以写成

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k y^{n-k}, \tag{2}$$

并且 $x^0y^n, x^1y^{n-1}, \cdots, x^ny^0$ 是线性无关的,所以

$$x^0y^n, x^1y^{n-1}, \cdots, x^ky^{n-k}, \cdots, x^ny^0 \tag{3}$$

是 V_n 的一个基,从而 V_n 是 $n+1$ 维的. 考虑 $\Phi_n(A)$ 在基(3)下的矩阵,由于

$$\Phi_n(A)(x^ky^{n-k}) = (a_{11}x + a_{21}y)^k(a_{12}x + a_{22}y)^{n-k}, \tag{4}$$

因此 Φ_n 的矩阵元素是 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 的多项式,从而是 $\mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$ 上的连续函数. 这就证明了 Φ_n 是拓扑群 $\mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$ 的表示. 考虑 Φ_n 在子群 $\mathrm{SU}(2)$ 上的限制,则得到 $\mathrm{SU}(2)$ 的表示,仍用同一个符号 Φ_n.

定理6.7.1 $\mathrm{SU}(2)$ 的上述表示 $\Phi_n (n = 0, 1, 2, \cdots)$ 是不可约的.

证明 在本章§1.3中我们已指出 $\mathrm{SU}(2)$ 的任一元素有如下形式

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \tag{5}$$

考虑 $\mathrm{SU}(2)$ 中由对角矩阵

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad |\alpha| = 1, \ \alpha \in \boldsymbol{C} \tag{6}$$

组成的子群 L. 我们首先来决定 V_n 在子群 L 下的不变子空间. 直

接计算得

$$\Phi_n(A(\alpha))x^ky^{n-k} = (\alpha x)^k(\overline{\alpha}y)^{n-k} = \alpha^{2k-n}x^ky^{n-k}. \tag{7}$$

从(7)式看出，V_n 的基(3)的每个向量 x^ky^{n-k} 是线性变换 $\Phi_n(A(\alpha))$ 的特征向量，$\forall\ A(\alpha)\in L$. 所以每个 $\langle x^ky^{n-k}\rangle$ 是 V_n 在 L 下的1维不变子空间，$k=0,1,\cdots,n$. 于是 V_n 是这 $n+1$ 个1维 L-不变子空间的直和. 容易验证 L 在这些1维不变子空间上的子表示是两两不等价的. 我们断言，V_n 的任意一个 L-不变子空间 U 一定是上述某些1维 L-不变子空间的和. 由于 U 是完全可约的，从而 U 是一些极小不变子空间的和. 因此只要考虑 U 本身是极小不变子空间的情形. 设 p_k 是 U 在 $\langle x^ky^{n-k}\rangle$ 上的投影，易验证 p_k 是不可约 CL-模 U 到不可约 CL-模 $\langle x^ky^{n-k}\rangle$ 的模同态. 据引理2.2.6，如果 U 与 $\langle x^ky^{n-k}\rangle$ 不是模同构，则 $p_k=0$. 注意到 $\langle x^ky^{n-k}\rangle(k=0,1,\cdots,n)$ 是两两不模同构的，并且它们的直和是整个空间 V_n，因此 U 恰好与某一个，譬如说 $\langle xy^{n-1}\rangle$ 模同构，而其余 $p_k=0(k=0,2,\cdots,n)$. 因此 $U=\langle xy^{n-1}\rangle$. 这证明了：$V_n$ 的任意一个 L-不变子空间 U 一定是某些 $\langle x^ky^{n-k}\rangle$ 的和.

现在设 W 是 V_n 的任意一个非零的 SU(2)-不变子空间. 它当然也是 L-不变子空间. 据上一段知，W 包含某一个子空间 $\langle x^ry^{n-r}\rangle$. 任取SU(2)中一个非对角矩阵 $A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha}\end{pmatrix}$，其中 $\alpha\neq0$ 并且 $\beta\neq0$. 我们有

$$f := \Phi_n(A)x^ry^{n-r} = (\alpha x-\overline{\beta}y)^r(\beta x+\overline{\alpha}y)^{n-r},$$

f 中的一项 $\alpha^r\beta^{n-r}x^n$ 的系数 $\alpha^r\beta^{n-r}\neq0$. 因为 W 是 SU(2)-不变子空间，所以 $f\in W$. 由于 W 是一些形如 $\langle x^ky^{n-k}\rangle$ 的子空间的和，既然 $f\in W$ 并且 f 有一项 $\alpha^r\beta^{n-r}x^n$，因此 W 包含子空间 $\langle x^n\rangle$. 类似地，我们考虑

$$g := \Phi_n(A)x^n = (\alpha x-\overline{\beta}y)^n = \sum_{k=0}^{n}C_n^k\alpha^k(-\overline{\beta})^{n-k}x^ky^{n-k}, \tag{8}$$

因为 $g\in W$ 并且所有系数 $C_n^k\alpha^k(-\overline{\beta})^{n-k}\neq0$，所以 W 包含子空间

$\langle x^k y^{n-k}\rangle (k=0,1,\cdots,n)$. 即, $W=V_n$. 这证明了 Φ_n 不可约. ▎

利用 SU(2)的上述一系列不可约复表示 $\Phi_n(n=0,1,2,\cdots)$, 可以得到 SO(3)的一系列不可约复表示. 为此需要利用我们在本章 § 1的1.3中指出的一个事实:

$$\mathrm{SO}(3) \cong \mathrm{SU}(2)/\{\pm I\}. \tag{9}$$

在 § 1中的1.3我们没有给出(9)式的证明, 现在我们来证明它.

设 V 是迹为零的2级 Hermite 矩阵组成的集合, 它的元素形如

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + \mathrm{i}x_3 \\ x_2 - \mathrm{i}x_3 & -x_1 \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2, x_3 \in \boldsymbol{R}. \tag{10}$$

容易验证 V 是实数域 $\boldsymbol{R}$ 上的向量空间, 并且易看出

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

是 V 的一个基, 因此 $\dim V=3$. 设

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 + \mathrm{i}y_3 \\ y_2 - \mathrm{i}y_3 & -y_1 \end{pmatrix}, \quad y_1, y_2, y_3 \in \boldsymbol{R}.$$

考虑 V 上的一个二元函数

$$(X,Y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \tag{12}$$

易验证(12)式定义了 V 的一个内积, 从而 V 成为3维欧几里得空间. (11)是 V 的一个标准正交基.

现在令

$$\psi: \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}(V),$$
$$A \mapsto \psi(A),$$

其中

$$\psi(A)X = AXA^{-1}, \quad X \in V. \tag{13}$$

容易看出 $AXA^{-1} \in V$. 容易验证 $\psi(A)$是 V 的一个可逆线性变换, 因此 ψ 是 SU(2)到 GL(V)的一个映射. 容易验证 $\psi(AB) = \psi(A)\psi(B)$. 所以 ψ 是 SU(2)到 GL(V)的一个群同态. 直接计算 $\psi(A)$在这个基下的矩阵, 可看出 ψ 的矩阵元素是连续函数, 因此

ψ 是拓扑群 SU(2)到拓扑群 GL(V)的同态.

因为 $\det X = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = -(X, X)$，并且 $\det(AXA^{-1}) = \det X$，所以 $\psi(A)$保持向量 X 的长度不变，从而 $\psi(A)$是 V 的正交变换. 于是 $\psi(A)$的行列式为$+1$或-1. 在本章 §1中的1.3我们已证明拓扑群 SU(2)与 S^3同构，因此 SU(2)是连通的. 由于 ψ 和 det 都是连续映射，所以 $A \mapsto \det\psi(A)$是连续映射. 由于连通空间的连续像是连通空间，并且 $\det\psi(I)=1$，因此对于所有 $A \in \mathrm{SU}(2)$都有 $\det\psi(A)=1$，从而 $\psi(A) \in \mathrm{SO}(3)$. 于是我们已经得到了一个拓扑群的同态：

$$\psi: \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3). \tag{14}$$

定理6.7.2 由(12)式和(14)式给出的拓扑群 SU(2)到拓扑群 SO(3)的同态 ψ 是满射，它的核由两个矩阵 I 与 $-I$ 组成.

为了证明定理6.7.2，我们需要两个引理.

引理6.7.1 设 F 是 SO(3)的子群，它具有下列性质：

1) F 传递地作用在单位球面上，即，任一给定的单位向量能通过属于 F 的一个正交变换变成任意一个单位向量；

2) 存在一根轴使得 F 包含所有绕这根轴的旋转，则 $F=\mathrm{SO}(3)$.

证明 设 F 包含所有绕轴$\langle e\rangle$的旋转，其中$|e|=1$. 设 $g \in \mathrm{SO}(3)$. 据假设1)，存在一个 $f \in F$ 使得 $fe=ge$，即 $f^{-1}ge=e$. 于是 $f^{-1}g$ 是绕$\langle e\rangle$的旋转. 据假设2)，$f^{-1}g \in F$. 从而 $g=f(f^{-1}g) \in F$. 这证明了 $\mathrm{SO}(3)=F$. ▌

引理6.7.2 对于每个 $X \in V$ 且 $X \neq 0$，存在 $A \in \mathrm{SU}(2)$使得 $AXA^{-1}=cX_1$，其中 $X_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$并且 $c>0$.

证明 因为任一 Hermite 矩阵能够酉相似于一个实对角矩阵，并且相似的矩阵有相同的迹，所以对于每个 $X \in V$ 且 $X \neq 0$，存在一个2级酉矩阵 B 使得

$$BXB^{-1} = \begin{pmatrix}c & 0\\ 0 & -c\end{pmatrix}$$

且可以使 $c>0$. 令

$$A=(\det B)^{-\frac{1}{2}}B,$$

则 $\det A=1$，并且

$$\bar{A}'A=(\overline{\det B})^{\frac{1}{2}}\bar{B}'(\det B)^{-\frac{1}{2}}B=|\det B|^{-1}I=I.$$

因此 $A\in\mathrm{SU}(2)$. 显然有

$$\begin{aligned}AXA^{-1}&=(\det B)^{-\frac{1}{2}}BX(\det B)^{\frac{1}{2}}B^{-1}=BXB^{-1}\\&=\begin{pmatrix}c&0\\0&-c\end{pmatrix}=cX_1.\end{aligned}$$ ▌

定理6.7.2的证明 为了证明 ψ 是满射，我们把引理6.7.1应用到 $\mathrm{SO}(3)$的子群 $F=\psi(\mathrm{SU}(2))$上. 任给 V 中两个单位向量 X 与 Y，据引理6.7.2，存在 $A_1,A_2\in\mathrm{SU}(2)$使得

$$A_1XA_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad A_2YA_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

从而得

$$(A_2^{-1}A_1)X(A_2^{-1}A_1)^{-1}=Y,$$

即，$\psi(A_2^{-1}A_1)X=Y$. 因此 F 满足性质1). 下面来证 F 满足性质2). 取 $\mathrm{SU}(2)$中的对角矩阵

$$A(\alpha)=\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\bar{\alpha}\end{pmatrix},\quad |\alpha|=1,\ \alpha\in\boldsymbol{C}.$$

任取 $X\in V$，我们有

$$\begin{aligned}\psi(A(\alpha))X&=A(\alpha)XA(\alpha)^{-1}\\&=\begin{pmatrix}x_1&\alpha^2(x_2+\mathrm{i}x_3)\\\bar{\alpha}^2(x_2-\mathrm{i}x_3)&-x_1\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{15}$$

设 $\alpha=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，从(15)得出

$$\begin{aligned}&\psi(A(\alpha))X_1=X_1,\\&\psi(A(\alpha))X_2=\cos2\theta X_2+\sin2\theta X_3,\\&\psi(A(\alpha))X_3=-\sin2\theta X_2+\cos2\theta X_3.\end{aligned}$$

因此 $\psi(A(\alpha))$在 V 的标准正交基 X_1,X_2,X_3下的矩阵是

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta\\ 0 & \sin 2\theta & \cos 2\theta\end{pmatrix}, \tag{16}$$

这表明 $\psi(A(\alpha))$是绕轴$\langle X_1\rangle$转角为2θ的旋转. 当 θ 取遍全体实数时,$\psi(A(\alpha))$就取遍绕轴$\langle X_1\rangle$的所有旋转. 因此 F 满足性质2). 据引理6.7.1得,$F=SO(3)$,即 ψ 是满射.

现在来求 $\mathrm{Ker}\psi$. 设 $A\in\mathrm{Ker}\psi$,则 $\psi(A)$是 V 的恒等变换. 特别地,$\psi(A)X_1=X_1$,即 $AX_1=X_1A$. 由此得出 A 是对角矩阵. 因此 A 有形式 $A(\alpha)$. 从公式(15)得出,$\psi(A(\alpha))$是 V 的恒等变换当且仅当 $\alpha^2=1$,即 $\alpha=\pm1$. 因此 $A=\pm I$. 这证明了 $\mathrm{Ker}\psi=\{I,-I\}$. ▎

从定理6.7.2即得

$$SO(3)\cong SU(2)/\{\pm I\}.$$

现在我们从 SU(2)的不可约复表示 Φ_n 通过分解来得出SO(3)的不可约复表示. 为此要求 $\mathrm{Ker}\Phi_n\supseteq\{\pm I\}$. 由于

$$\begin{aligned}(\Phi_n(-I)f)(x,y) &= f((x,y)(-I))\\ &= f(-x,-y) = (-1)^n f(x,y),\end{aligned}$$

因此$-I\in\mathrm{Ker}\Phi_n\Longleftrightarrow n$ 为偶数. 当 $n=2m$ 时,Φ_{2m}对于正规子群 $N=\{\pm I\}$分解就可得到 SO(3)的不可约复表示,记作 Ψ_{2m}. 即,任意 $g\in SO(3)$,设 g 对应于 AN,其中 $A\in SU(2)$,则

$$\Psi_{2m}(g)=\Phi_{2m}(A).$$

这样我们便得到了 SO(3)的一系列不可约复表示 $\Psi_{2m}(m=0,1,2,\cdots)$.

下面我们来证明

定理6.7.3 SU(2)的上述不可约复表示 $\Phi_n(n=0,1,2,\cdots)$ 是 SU(2)的全部不等价的有限维不可约复表示. 从而 SO(3)的上述不可约复表示 $\Psi_{2m}(m=0,1,2,\cdots)$是 SO(3)的全部不等价的有限维不可约复表示.

证明 如果我们能证明 SU(2)的不可约复表示 $\Phi_n(n=0,1,2,\cdots)$提供的特征标 $\chi_n(n=0,1,2,\cdots)$组成 SU(2)的连续类函数

空间的完备正交集，那么SU(2)的每一个不可约复表示一定等价于$\Phi_n(n=0,1,2,\cdots)$中的某一个(对于它的特征标应用§6的(1)式)，从而定理6.7.3将得证. 正交性已在§5中证明，剩下只要证完备性.

首先，我们来证SU(2)的任一类函数f被它在由对角矩阵$A(\alpha)$组成的子群L上的限制唯一决定，并且

$$f(A(\alpha)) = f(A(\alpha^{-1})).$$

任取$B\in SU(2)$. 因为任一2级酉矩阵一定酉相似于对角矩阵，其主对角元为$e^{i\theta_k}(k=1,2)$，所以存在酉矩阵T_1使得

$$T_1^{-1}BT_1 = \mathrm{diag}\{e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}\}.$$

因为$\det B=1$，所以$\det(T_1^{-1}BT_1)=1$，即$e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2}=1$，由此得$e^{i\theta_2}=e^{-i\theta_1}$. 记$\alpha=e^{i\theta_1}$，则$T_1^{-1}BT_1=\mathrm{diag}\{\alpha,\alpha^{-1}\}=A(\alpha)$. 令$T=(\det T_1)^{-\frac{1}{2}}T_1$，则$\det T=1$，并且有$\overline{T}'T=I$. 因此$T\in SU(2)$. 显然有

$$T^{-1}BT = T_1^{-1}BT_1 = A(\alpha).$$

因此B与$A(\alpha)$在SU(2)中共轭. 由于f是类函数，因此

$$f(B) = f(T^{-1}BT) = f(A(\alpha)).$$

这证明了SU(2)的任一类函数f被它在L上的限制唯一决定. 因为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

所以$\mathrm{diag}\{\alpha,\alpha^{-1}\}$与$\mathrm{diag}\{\alpha^{-1},\alpha\}$酉相似. 类似地可证$\mathrm{diag}\{\alpha,\alpha^{-1}\}$与$\mathrm{diag}\{\alpha^{-1},\alpha\}$在SU(2)中共轭. 因此$f(A(\alpha))=f(A(\alpha^{-1}))$.

其次，我们来计算SU(2)的不可约复表示Φ_n的特征标χ_n在L上的限制. 设$A(\alpha)=\mathrm{diag}\{\alpha,\overline{\alpha}\}$，$\alpha\in \boldsymbol{C}$，$|\alpha|=1$. 据(7)式，得

$$\chi_n(A(\alpha)) = \sum_{k=0}^{n}\alpha^{2k-n} = \alpha^{-n}\sum_{k=0}^{n}\alpha^{2k} = \frac{\alpha^{n+1}-\alpha^{-(n+1)}}{\alpha-\alpha^{-1}}. \quad (17)$$

令

$$\xi_n(\alpha) = \chi_n(A(\alpha)), \quad \alpha\in \boldsymbol{C}, |\alpha| = 1. \quad (18)$$

显然有 $\xi_n(\bar{\alpha})=\chi_n(A(\bar{\alpha}))=\chi_n(A(\alpha))=\xi_n(\alpha)$.

用 W 表示定义在单位圆周 S^1 上的所有满足下列两个条件的函数 ξ 组成的集合：ξ 可表示成 α 与 $\bar{\alpha}$ 的多项式，并且 $\xi(\bar{\alpha})=\xi(\alpha)$. 显然 W 是复数域上的向量空间. 因为

$$\begin{aligned} &\xi_0(\alpha)=1, && \xi_1(\alpha)=\alpha+\bar{\alpha}, \\ &\xi_2(\alpha)=\alpha^2+\bar{\alpha}^2+1, && \xi_3(\alpha)=(\alpha^2+\bar{\alpha}^2)(\alpha+\bar{\alpha}), \\ &\cdots\cdots && \cdots\cdots \end{aligned} \tag{19}$$

所以 $\langle\xi_0,\xi_1,\xi_2,\cdots\rangle\subset W$. 由于 W 中元素 ξ 是 α 和 $\bar{\alpha}$ 的多项式并且满足 $\xi(\bar{\alpha})=\xi(\alpha)$，因此 ξ 是 α 和 $\bar{\alpha}$ 的对称多项式. 根据对称多项式基本定理，存在一个2元多项式 $g(y_1,y_2)$ 使得 $\xi(\alpha,\bar{\alpha})=g(\alpha+\bar{\alpha},\alpha\bar{\alpha})$. 注意到 $\alpha+\bar{\alpha}=\xi_1(\alpha)$，$\alpha\bar{\alpha}=\xi_0(\alpha)$，因此从(19)式易得出 $\xi\in\langle\xi_0,\xi_1,\xi_2,\cdots\rangle$（注意从(19)式可得出：$\xi_1^2=\xi_2+\xi_0$，$\xi_1^3=\xi_3+2\xi_1,\cdots$）. 这证明了：$W=\langle\xi_0,\xi_1,\xi_2,\cdots\rangle$，即 W 与 $\xi_0,\xi_1,\xi_2,\cdots$ 生成的线性子空间一致. 据 Weierstrass 定理，S^1 上所有满足 $h(\bar{\alpha})=h(\alpha)$ 的连续函数组成的空间 $C_0(S^1,\boldsymbol{C})$ 中任一元素可由 W 中的元素一致逼近，因此 W 在空间 $C_0(S^1,\boldsymbol{C})$ 中稠密. 从而 $\xi_0,\xi_1,\xi_2,\cdots$ 是 $C_0(S^1,\boldsymbol{C})$ 的完备集.

SU(2)上的任一连续类函数 f 在子群 L 上的限制 $f(A(\alpha))$ 是 S^1 上的连续函数并且满足 $f(A(\bar{\alpha}))=f(A(\alpha))$，因此 $f(A(\alpha))\in C_0(S^1,\boldsymbol{C})$. 又由于 $\xi_n(\alpha)=\chi_n(A(\alpha))$，所以从上一段知，$f(A(\alpha))$ 可以由 $\langle\chi_0(A(\alpha)),\chi_1(A(\alpha)),\chi_2(A(\alpha)),\cdots\rangle$ 中的元素一致逼近. 又由于 SU(2)上的任一类函数被它在子群 L 上的限制唯一决定，因此 f 可以由 $\langle\chi_0,\chi_1,\cdots\rangle$ 中的元素一致逼近. 这证明了 $\chi_0,\chi_1,\chi_2,\cdots$ 是 SU(2)的连续类函数空间中的完备正交集. 现在完成了定理6.7.3的证明. ▌

习 题 6.7

1. 设 φ 和 ψ 是 SU(2)的两个复表示并且它们在子群 L(对角矩阵组成的子群)上的限制是等价的，证明：φ 与 ψ 等价.

参 考 文 献

[1] Curtis C. W. and Reiner I., *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, John Wiley & Sons, New York, 1962.

[2] Jean-Pierre Serre, *Linear Representations of Finite Groups*, Springer-Verlag, New York, 1977. 中译本《有限群的线性表示》,郝钢新译,科学出版社,1984.

[3] Vinberg E. B., *Linear Representations of Groups*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1989.

[4] Isaacs I. M., *Character Theory of Finite Groups*, Academic Press, New York, 1976.

[5] Curtis C. W. and Reiner I., *Methods of Representation Theory with Applications to Finite Groups and Orders*, Volume I, John Wiley & Sons, New York, 1981.

[6] Feit W., *The Representation Theory of Finite Groups*, North-Holland Mathematical Library, New York, 1982.

[7] Gorenstein D., *Finite Groups*, Harper and Row, New York, 1968.

[8] Hall M., *The Theory of Groups*, Macmillan, New York, 1959. 中译本《群论》,裘光明译,科学出版社,1981.

[9] Huppert B., *Endliche Gruppen, I*, Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[10] Wielandt H., *Finite Permutation Groups*, Academic Press, New York, 1964.

[11] Zhelobenko D. P., *Compact Lie Groups and Their Representations*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1973.

[12] Pontryagin L. S. (邦德列雅金),《连续群(上册)》,曹锡华译,科学出版社,1978.

[13] Kostrikin A. L. (柯斯特利金),《代数学引论(下册)》,蓝以中,丘维声,张顺燕译,高等教育出版社,1988.

[14] 曹锡华,时俭益,《有限群表示论》,高等教育出版社,1992.

[15] 聂灵沼,丁石孙,《代数学引论》,高等教育出版社,1988.

[16] Armstrong M. A.,《基础拓扑学》,孙以丰译,李同孚校,北京大学出版社,1983.

[17] 丘维声,与极小非超可解群有关的群的不可约表示,北京大学学报(自然科学版),第26卷,第5期,1990,592~601.

符 号 说 明

符号	说明
$\cap$	交
$\cup$	并
$\dot{\cup}$	不相交集合的并集
$\times$	集合的笛卡儿积，或群的直积
$\rtimes$	群的半直积，开口对正规子群
$\in$	属于
$\bar{\in}$（或$\notin$）	不属于
$\subseteq$	含于
$\supseteq$	包含
$\subsetneqq$	真含于
$\supsetneqq$	真包含
$\varnothing$	空集合
:	定义为
$\to$	映射
$\mapsto$	在一个映射下元素的对应关系
$\hookrightarrow$	含入映射(即，内射)
$\forall$	对任意
$\approx$	群表示的等价
$\cong$	同构
$\equiv$	同余
$\overline{A}$	集合 A 在全集中的补集，集合 A 的闭包
$A\backslash B$	集合 B 在集合 A 中的补集
δ_{ij}	Kronecker 符号
$\oplus$	表示的直和；向量空间(或环、模)的内直和
$\dot{+}$	向量空间(或模)的外直和
$\otimes$	张量积，下标指明基环；或矩阵的 Kronecker 积
1_V	集合 V 上的恒等变换
1_G	群 G 的主表示(即，单位表示)

$\langle a\rangle$	由元素 a 生成的循环群
$\langle \alpha\rangle$	由向量 α 生成的子空间
$\langle g_1,g_2,\cdots,g_s\rangle$	由元素 $g_1,g_2,\cdots,g_s$ 生成的子群
$\langle \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\rangle$	由向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 生成的子空间
$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$	向量空间的一个基
$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$	由环 R 中元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 生成的理想
(α,β)	实(或复)线性空间的内积
(ξ,η)	复向量空间 C^G 的一个内积：$(\xi,\eta):=\frac{1}{\lvert G\rvert}\sum_{g\in G}\xi(g)\overline{\eta(g)}$
$\langle\xi,\eta\rangle$	K^G 上的一个对称双线性函数：$\langle\xi,\eta\rangle:=\frac{1}{\lvert G\rvert}\sum_{g\in G}\xi(g)\eta(g^{-1})$
$\langle A,B\rangle$	由群 G 的子群 A,B 生成的子群
$a\mid b$	a 整除 b
$a\nmid b$	a 不能整除 b
$\varphi(g)\mid U$	线性变换 $\varphi(g)$ 在 U 上的限制
$\varphi\mid H$	群 G 的表示 φ 在子群 H 上的限制
$\chi\mid H$	群 G 的特征标 χ 在子群 H 上的限制
$\boldsymbol{Z}$	有理整数环
$\boldsymbol{Q}$	有理数域
$\boldsymbol{R}$	实数域
$\boldsymbol{C}$	复数域
A_n	n 元交错群
A^F	$A^F:=F\otimes_K A$，其中 A 是域 K 上的代数，F 是 K 的扩域，A^F 是域 F 上的代数
$\mathrm{Aut}(G)$	群 G 的全自同构群
$\mathrm{ann}(M)$	左 R-模 M 的零化子
$\mathrm{ann}(x)$	M 中元素 x 的零化子
$C_G(a)$	群 G 的元素 a 在 G 里的中心化子
$Cf_K(G)$	群 G 的 K 值类函数空间
$\mathrm{char}K$	域 K 的特征数
$\mathrm{char}(G)$	群 G 的广义特征标环

$C(G,\boldsymbol{R})$	紧致群 G 上所有连续实值函数组成的实线性空间
$C(G,\boldsymbol{C})$	紧致群 G 上所有连续复值函数组成的复线性空间
deg	次数
det	行列式
dim	维数，下标指明基域
D_n	阶数为 $2n$ 的二面体群
E^n	n 维欧氏空间
$F(g)$	作用在集合 Ω 上的群 G 其元素 g 的不动点集
F/K	域 K 的扩域 F
$\|G\|$	有限群 G 的阶
$G>H$（或 $H<G$）	H 为 G 的子群
$G\triangleright H$（或 $H\triangleleft G$）	H 为 G 的正规子群
$[G:H]$	子群 H 在群 G 中的指数
G/H	群 G 对正规子群 H 的商群
$\mathrm{Gal}(F/K)$	域 F 在子域 K 上的伽罗瓦群
$\mathrm{GL}(V)$	向量空间 V 上所有可逆线性变换组成的乘法群
$\mathrm{GL}_n(K)$（或 $\mathrm{GL}(n,K)$）	域 K 上 n 级一般线性群，它由域 K 上所有 n 级可逆矩阵组成
G_x	x 的稳定子群
$G(x)$	x 的 G-轨道
G'（或 $G^{(1)}$）	群 G 的换位子群（即，导群）
$G^{(i)}$	群 G 的第 i 阶换位子群
$\hat{G}$	abel 群 G 的所有不可约 K-表示组成的群，其中 K 包含本原 m 次单位根，m 是群 G 的指数
$\mathrm{GF}(q)$	q 元伽罗瓦域
$\mathrm{Hom}_K(V,V)$	域 K 上向量空间 V 的所有线性变换组成的代数
$\mathrm{Hom}_R(M,N)$	左 R-模 M 到 N 的所有 R-同态组成的 abel 加群
I	单位矩阵，或环的理想，或指标集
Im	像
$\mathrm{Irr}_K(G)$（或 $\mathrm{Irr}(G)$）	群 G 的所有不可约 K-特征标的集合

$\mathrm{IRR}_K(G)$	群 G 的所有不可约 K-表示的集合
$\mathrm{IRR}(K[G])$	所有不可约 $K[G]$-模的集合
$i(V,U)$	左 $K[G]$-模 V 与 U 的交结数，它是 $\mathrm{Hom}_{K[G]}(V,U)$ 的维数
K^n	域 K 上 n 元有序组所成的向量空间
K^G	群 G 的所有 K 值函数组成的向量空间
Ker	核
$K[G]$	群 G 在域 K 上的群代数
$K[\zeta]$	域 K 添加本原 n 次单位根 ζ 得到的扩域
$KCf(G)$	群 G 的所有 K-共轭类函数的集合
$M_n(K)$	域 K 上所有 n 级矩阵组成的代数
M/N	左 R-模 M 对子模 N 的商模
M^F	$M^F := F\otimes_K M$，其中 M 是左 A-模，A 是域 K 上的代数，F 是 K 的扩域，M^F 是左 A^F-模
$N_G(H)$	子群 H 在群 G 里的正规化子
$O(n)$	n 级正交群，它由全体 n 级实正交矩阵组成
$\mathrm{PGL}(n,q)$	域 $\mathrm{GF}(q)$ 上 n 级射影一般线性群
$\mathrm{PSL}(n,q)$	域 $\mathrm{GF}(q)$ 上 n 级射影特殊线性群
$\boldsymbol{Q}(\zeta)$	分圆域，其中 ζ 是本原 n 次单位根
R/I	环 R 对理想 I 的商环
$R(P^3)$	3 维实射影空间
$\mathrm{rad}R$	环 R 的根
$J(R)$	环 R 的 Jacobson 根
S_n	n 元对称群
S^n	n 维球面
$\mathrm{SL}(n,C)$	n 级复特殊线性群
$\mathrm{SO}(n)$	n 级特殊正交群
$\mathrm{SU}(n)$	n 级特殊酉群
tr	迹
$U(n)$	n 级酉群
$U^\perp$	子空间 U 的正交补

V/U	向量空间 V 对子空间 U 的商空间
V^*	向量空间 V 的对偶空间
V_4	四元群
V^F	$V^F := F\otimes_K V$，其中 F 是 K 的扩域，V 是域 K 上的向量空间，V^F 是域 F 上的向量空间
$V\#W$	左 $K[G_1]$-模 V 与左 $K[G_2]$-模 W 的外张量积
W^G	$W^G := K[G]\otimes_{K[H]}W$，左 $K[H]$-模 W 的诱导模，其中 H 是群 G 的子群
$Z(A)$	代数 A 的中心
$Z(G)$	群 G 的中心
$Z(D)$	除环 D 的中心
$Z(\chi)$	群 G 的特征标 χ 的中心：$Z(\chi) := \{g\in G \mid \lvert\chi(g)\rvert=\chi(1)\}$
$\mathbf{Z}[\alpha]$	复数域 $\mathbf{C}$ 中包含 $\mathbf{Z}$ 和复数 α 的一切子环的交
$\varphi(n)$	整数 n 的欧拉函数值
φ^*	群 G 的表示 φ 的逆步表示，或群代数 $K[G]$ 的由 φ 扩充成的表示
Φ	群 G 的表示 φ 提供的矩阵表示
φ_U	表示 φ 的子表示，具有表示空间 U
$\varphi_{V/U}$	表示 φ 的商表示，具有表示空间 V/U
φ^σ	群 G 的表示 φ 通过 G 的自同构 σ 的挠表示，或 φ 通过域的自同构 σ 得到的共轭表示
ψ^g	群 G 的正规子群 N 的表示 ψ 通过外自同构 $\tau(g)$ 得到的共轭表示
$I(\psi)$	表示 ψ 的惯性群：$I(\psi)=\{g\in G \mid \psi^g\approx\psi\}$
φ^F	群 G 的 K-表示 φ 通过基域 K 的扩张得到的 F-表示
$\varphi\#\psi$	群 G_1 的表示 φ 与群 G_2 的表示 ψ 的外张量积
ψ^G	群 G 的子群 H 的表示 ψ 的诱导表示
$\Phi_m(x)$	m 次分圆多项式
χ_φ	表示 φ 提供的特征标
χ_0	群 G 的主特征标，有时也用 χ_1 表示 G 的主特征标

χ_ρ	有限群G的正则表示ρ提供的特征标
χ^*	χ的逆步特征标，或群代数$K[G]$的表示φ^*提供的特征标
χ^σ	群G的表示φ的挠表示φ^σ提供的特征标，或φ经过域自同构得到的共轭表示φ^σ提供的特征标
χ^g	群G的正规子群N的表示ψ的共轭表示ψ^g提供的特征标
μ^G	群G的子群H的特征标μ的诱导特征标
η^G	群G的子群H的类函数η的诱导类函数

名 词 索 引

（汉英对照）

一 画

三 画

四 画

五　　画

六　　画

七　画

八　画

九 画

十 画

十 一 画

十 二 画

十 三 画

十 四 画